

Programmation logique et fonctionnelle, L3 informatique
Examen : deuxième session, année 2018-2019



Modalités

Documents autorisés : trois feuilles A4 recto-verso manuscrites ou imprimées. Ordinateurs et smartphones interdits.

Partie 1 : Logique propositionnelle

A1 (10%)

Soient les deux formules suivantes. La formule Σ_2 est-elle conséquence logique de la formule Σ_1 ? La formule Σ_1 est-elle conséquence logique de la formule Σ_2 ? Justifiez vos réponses.

$$\Sigma_1 : (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \quad \Sigma_2 : a \vee b$$

A2 (10%)

Soient a , b et c trois variables. Modélisez à l'aide d'une formule propositionnelle la propriété « si ($a=0$ et $b=0$) alors $c=1$ sinon $c=0$ ».

Partie 2 : Logique du premier ordre

B1 (10%)

Soit la formule Σ suivante :

$$\Sigma : \forall X \exists Y [p(X, Y) \wedge \neg p(Y, X)]$$

Cette formule est-elle valide ? Est-elle cohérente ? Justifiez votre réponse.

B2 (10%)

Soit l'interprétation suivante :

- Domaine d'interprétation : l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels.
- Interprétation du prédicat *somme*/3 : *somme*(A, B, C) est vrai si et seulement si C est la somme de A et B (au sens de l'arithmétique standard).
- Interprétation du prédicat *pair*/1 : *pair*(A) est vrai si et seulement si A est un nombre pair.

Donnez une formule de la logique du premier ordre, utilisant pour seuls prédicats *somme* et *pair*, qui modélise la propriété : « La somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair ».

Partie 3 : PROLOG

C1 (10%)

Spécifiez un prédicat *gen*/3 tel que si les variables A et B sont instanciées avec des entiers et la variable L n'est pas instanciée, alors le but *gen*(A, B, L) réussit et instancie L avec la liste de tous les entiers compris entre A (inclus) et B (inclus).

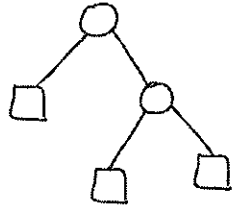
Par exemple, *gen*(3, 5, L) doit avoir pour résultat $L=[3, 4, 5]$.

C2 (10%)

On représente des arbres avec les termes fonctionnels suivants : $f/0$ représente une feuille et $b/2$ représente un arbre à racine binaire. Les nœuds et les feuilles ne sont pas étiquetés.

La représentation par liste d'un tel arbre consiste à représenter une feuille par une liste vide et un arbre qui n'est pas une feuille par la liste des représentations par liste de ses deux fils.

Par exemple, voici la représentation graphique et la représentation par liste de l'arbre désigné par le terme $b(f, b(f, f))$.



$[[[], [[], []]]]$

Spécifiez un prédicat `lrep/3` tel que si `A` est un terme représentant un arbre et `L` une variable non instanciée, alors le but `lrep(A, L)` réussit et instancie `L` avec la représentation par liste de l'arbre désigné par `A`.

Par exemple, la but `lrep(b(f, b(f, f)), L)` doit avoir pour résultat `L = [[], [[], []]]`.

Partie 4 : Lambda-calcul

D1 (5%)

Encadrez les applications, soulignez les abstractions et entourez les variables libres dans le terme suivant.

`abλa. λx. yxλc. ab`

D2 (15%)

Donnez toutes les étapes d'évaluation des termes suivants.

1. `λa. (λb. ba)xa`
2. `(λa. λb. aab)b`
3. `(λa. λb. λc. cba)xyz`

Partie 5 : CAML

E1 (10%)

Réalisez une fonction `retire` telle que si `w` est une liste d'éléments d'un type `'a` quelconque et `x` est une valeur de type `'a`, alors `retire w x` retourne la liste obtenue en retirant de `w` la première occurrence de `x`.

Par exemple, `retire([2;6;3;2;3;1], 3)` doit retourner `[2;6;2;3;1]`.

E2 (10%)

On suppose qu'on dispose d'une fonction `min` telle que si `w` est une liste non vide d'entiers, `min w` retourne le plus petit élément de `w`. Cette fonction ne devra jamais être utilisée avec une liste vide.

Réalisez une fonction `tri` telle que si `w` est une liste d'entiers, alors `tri w` retourne le résultat du tri en ordre croissant des éléments de `w`.

La fonction `tri` doit utiliser le principe suivant :

1. Une liste vide est triée.
2. Le résultat du tri d'une liste `w` non vide a pour tête une valeur minimale de `w` et pour reste le résultat du tri de la liste obtenue en retirant une valeur minimale de `w`.

Vous devez utiliser la fonction `retire` décrite dans la question précédente, en supposant qu'elle est correctement programmée.