

## L3 - Probabilités discrètes

### L2-Probabilités, Université de Bourgogne

18 décembre, 2018

**Exercice 1** On choisit trois entiers dans l'ensemble  $S = \{1, 2, \dots, 15\}$ . Calculer la probabilité que

- 1) leur somme est impaire,
- 2) leur produit est impaire,
- 3) la somme est impaire sachant que le produit est impaire,
- 4) le produit est impaire sachant que la somme est impaire.

**Exercice 2** Une urne contient  $N$  boules parmi les lesquels se trouvent  $N_1$  boules blanches,  $N_2$  boules noires et  $N_3$  boules vertes ( $N_1 + N_2 + N_3 = N$ ). On effectue dans l'urne  $n$  tirages d'une boule et on définit les variables aléatoires suivantes :  $X$  (resp.  $Y$ ) est le nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues,  $X_i$  (resp.  $Y_i$ ) vaut 1 si le  $i$ ème tirage donne une boule blanche (resp. noire) et 0 sinon. On suppose que les tirages ont lieu avec remise.

- 1) Calculer  $\mathbb{E}(X_i)$ ,  $\mathbb{E}(Y_j)$  et  $\mathbb{E}(X_i \cdot Y_j)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ .
- 2) Calculer la covariance  $C(X, Y)$ , et les variances  $\sigma_X^2$  et  $\sigma_Y^2$ .
- 3) Calculer  $\rho(X, Y)$ . Montrer que  $|\rho(X, Y)| = 1$  implique que  $N_3 = 0$ .

**Rappel :**  $\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ .

**Exercice 3** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda > 0$  :

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$Y = (-1)^X.$$

- 1) Calculer  $\mathbb{P}(\{X = \text{pair}\})$  et  $\mathbb{P}(\{X = \text{impair}\})$ .
- 2) Déterminer la loi de  $Y$  et calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .
- 3) Déterminer la fonction génératrice  $G_X$  de  $X$  :  $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ . Exprimer  $\mathbb{E}(Y)$  à l'aide de  $G_X$ .

**Exercice 4** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs entières. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère :  $S_n = \max\{X_0, \dots, X_n\}$ .

i) On suppose qu'il existe un entier  $L$  tel que  $P(\{X \leq L\}) = 1$  et  $P(\{X = L\}) > 0$ . Montrer que pour tout  $\ell < L$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{S_n \leq \ell\}) = 0.$$

Montrer que  $S_n$  converge en probabilité vers  $L$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

ii) On suppose que  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . On pose  $T_n = 1/S_n$ . Montrer que  $T_n$  converge vers 0 en probabilité.

**Rappel :** On dit qu'une suite de variables aléatoires  $X_n$  convergent vers  $X$  en probabilité si pour tout  $\eta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \eta\}) = 0.$$

A/A