

Examen de la session 2

Durée : 2h00.

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice non-programmable. La qualité de la rédaction pourra faire perdre des points, mais ne donnera lieu à aucun gain de points (toute réponse non justifiée sera assimilée à une réponse fausse).

Vous trouverez les tables de la loi normale centrée réduite dans la feuille annexe.

Exercice 1

Dans un lot d'ampoules, on estime que 30% sont défectueuses. On dispose d'un test pour détecter les ampoules défectueuses. Si une ampoule n'est pas défectueuse, le test a 9 chances sur 10 d'être négatif; et il a 8 chances sur 10 d'être positif si l'ampoule est défectueuse. On soumet toutes les ampoules à ce test.

1. Quelle est la probabilité qu'une ampoule prise au hasard ne soit pas défectueuse?
2. Quelle est la probabilité que le test soit positif sachant que l'ampoule n'est pas défectueuse?
3. Quelle est la probabilité qu'une ampoule ne soit pas défectueuse et que le test soit positif?
4. Quelle est la proportion des ampoules pour lesquelles le test est positif?
5. Quelle est la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse sachant que le test est positif?
6. Quelle est la probabilité qu'une ampoule ne soit pas défectueuse sachant qu'elle a réagi négativement au test?

Exercice 2

On estime que deux taxis arrivent en moyenne toutes les quinze minutes dans un coin de rue de la ville de Dijon. On suppose que le nombre de taxi arrivant dans ce coin de rue suit une loi de Poisson. Six personnes arrivent simultanément dans ce coin de rue. Elles ne se connaissent pas et chacune d'elle prendra un taxi différent pour se rendre à son rendez-vous. Chacune de ses six personnes ne pourra pas honorer son rendez-vous si elle ne prend pas un taxi dans les 15 minutes qui suivent.

1. Déterminer la loi du nombre X de taxi arrivant dans ce coin de rue sur un intervalle de quinze minutes.
2. Quelle est la probabilité que ces six personnes honorent chacune son rendez-vous?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins deux de ces six personnes honorent leur rendez-vous?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins trois et au plus cinq de ces six personnes honorent leur rendez-vous?
5. Une personne arrive dans ce coin de rue. Elle ne pourra pas honorer son rendez-vous si elle ne prend pas un taxi dans les quinze minutes qui suivent. Cependant, à cause d'un manque d'attention de sa part, elle rate chaque taxi qui arrive avec probabilité $p = 0,2$. Quelle est la probabilité que cette personne n'honore pas son rendez-vous.

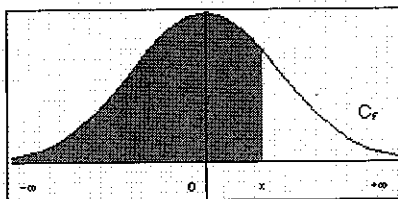
Exercice 3

Dans une entreprise, le temps de travail est en moyenne de 52.1 heures par semaine avec un écart-type de 3.1 heures. On suppose que le temps de travail d'un employé choisi au hasard est normalement distribué.

1. Quelle est la fraction des employés dont le temps de travail est compris entre 45.9 heures et 58.3 heures par semaine?
2. Quel est le pourcentage des employés qui travaillent plus de 60 heures par semaine?
3. À cause des coupes budgétaires importantes, la direction de l'entreprise a décidé de se séparer de 33% de ses employés, ceux qui travaillent le moins. Quel est le nombre minimum d'heures de travail à effectuer pour ne pas perdre son emploi?

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à x)



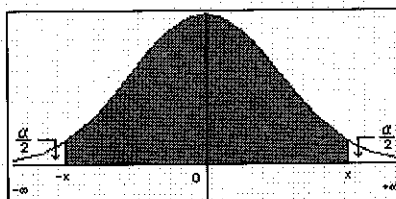
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(x)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

TABLE 2

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(Recherche de la valeur de x telle que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$)



α	0,20	0,15	0,10	0,075	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
$1 - \alpha$	0,80	0,85	0,90	0,925	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999
x	1,282	1,440	1,645	1,780	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291