Université de Bourgogne
Licence 3 de physique PC + PFA
CT Mécanique quantique 2018-2019

QCM

Questionnaire à choix multiples :

réponse juste (1 pt), pas de réponse (0 pt), réponse fausse (-0.5 pt). Pour chaque question, une seule réponse est juste. On considère un système quantique à deux niveaux. Une base $\mathcal{B}$ de l'espace de Hilbert est donne par les états $|1\rangle$, $|2\rangle$. L'état du système est décrit par une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Dans la base $\mathcal{B}$, l'Hamiltonien H est donné par :

$$H = \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x,$$

où $\theta \in (0, \pi)$. On rappelle que les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tout temps t, la fonction d'onde du système peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle,$$

où les coefficients complexes c_k sont de module $|c_k|$ et de phase ϕ_k, $c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$.

1. On considère l'état quantique $|\psi\rangle$ qui peut s'écrire sous forme matricielle $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, où c_1 et c_2 sont des nombres complexes. Une des quatre affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?

- ○ $|\psi\rangle$ est un état normé si : $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.
- ○ Le vecteur $\langle\psi|$ a pour représentation matricielle $\begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \end{pmatrix}$.
- ○ Le vecteur $|\chi\rangle$ de représentation matricielle $\begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $|\psi\rangle$.
- ○ Le vecteur $|\chi\rangle = e^{i\pi/4}|\psi\rangle$ a la même norme que le vecteur $|\psi\rangle$.

2. On introduit la matrice densité $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Quelle est l'expression du coefficient $\rho_{12} = \langle 1|\rho|2\rangle$?

- ○ $|c_1||c_2|$
- ○ c_1c_2
- ○ $c_1c_2^*$
- ○ $c_1^*c_2$
- ○ aucune de ces réponses

3. Quelle est la trace de ρ ?

   - ○ -1
   - ○ 0
   - ○ 1/2
   - ○ 1
   - ○ aucune de ces réponses

4. Quelle est la trace de ρ^2 ?

   - ○ -1
   - ○ 0
   - ○ 1/2
   - ○ 2
   - ○ aucune de ces réponses

5. La matrice densité ρ peut aussi s'exprimer comme une fonction des coordonnées (x, y, z) du vecteur de Bloch :

   $$\rho = (\mathbf{1} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)/2.$$

   On considère la fonction d'onde $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$. Quelles sont les coordonnées (x, y, z) du vecteur de Bloch correspondant à cet état ?

   - ○ $(1, 0, 0)$
   - ○ $(-1, 0, 0)$
   - ○ $(0, 1, 0)$
   - ○ $(0, -1, 0)$
   - ○ aucune de ces réponses

6. Quelle est la valeur moyenne $\langle H\rangle$ de l'Hamiltonien H si le système est dans l'état $|\chi\rangle$?

   - ○ $\cos\theta$
   - ○ $-\cos\theta$
   - ○ $\sin\theta$
   - ○ $-\sin\theta$
   - ○ aucune de ces réponses

7. On considère désormais un espace de Hilbert de dimension 3. On étudie un système dont l'Hamiltonien peut s'écrire dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ sous la forme $H = H_0 + \varepsilon H_1$ où $H_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ε étant un petit paramètre. Quelle est la correction des valeurs propres de H au premier ordre en ε ?

- ○ Cette correction est nulle pour les 3 valeurs propres.
- ○ La correction est égale à ε pour les 3 valeurs propres.
- ○ La correction est égale à $-\varepsilon$ pour les 3 valeurs propres.
- ○ La correction est respectivement égale à 2ε, ε et 0 pour les valeurs propres 2, 1 et 0.
- ○ aucune de ces réponses

8. On considère le même système qu'à la question précédente avec $\varepsilon = 1$. Une des quatre affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?

   - ○ $\langle 1|H|1\rangle = 2$.
   - ○ $\langle 1|H|2\rangle = 1$.
   - ○ $\langle 1|H|3\rangle = 1$.
   - ○ $\langle 2|H|3\rangle = 1$.

9. Le MASER a été inventé en :

   - ○ 1943.
   - ○ 1953.
   - ○ 1963.
   - ○ 1973.

10. I. I. Rabi a découvert le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire en :

    - ○ 1908.
    - ○ 1938.
    - ○ 1968.
    - ○ 1998.

11. On considère un atome décrit par son état fondamental $|g\rangle$ et son état excité $|e\rangle$. On introduit les opérateurs $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ et $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$. Parmi ces expressions, laquelle est exacte ?

    - ○ $\sigma_+^2 = \sigma_+$.
    - ○ $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$.
    - ○ $[\sigma_+, \sigma_z] = 2\sigma_+$.
    - ○ $\sigma_+\sigma_- = \sigma_z$.
    - ○ aucune de ces réponses

12. On considère le même système qu'à la question précédente. Parmi ces affirmations, laquelle est exacte ?

 ○ L'opérateur $\sigma_+ - i\sigma_-$ est Hermitien.
 ○ L'opérateur $\sigma_+ + i\sigma_-$ est Hermitien.
 ○ L'opérateur $\sigma_+ - \sigma_-$ est Hermitien.
 ○ L'opérateur $\sigma_+ + \sigma_-$ est Hermitien.
 ○ aucune de ces réponses

Problème I

On considère une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ où le hamiltonien H et une grandeur physique A sont représentés par les matrices :

$$H_0 = E_0 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \; A = a \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où E_0 et a sont des constantes positives.

1. On procède à une mesure de l'énergie. Quels résultats peut-on obtenir ? On procède à une mesure de la grandeur A. Quels résultats peut-on obtenir ?
2. On prépare le système dans létat : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle$. Quelle est la probabilitée pour qu'une mesure de l'énergie donne $3E_0$? Si le résultat d'une telle mesure est effectivement $3E_0$, quel est l'état du système après la mesure ?
3. Quelle est la probabilité pour que l'énergie mesurée soit E_0 si le système est initialement dans l'état $|\psi\rangle$? Quel est l'état du système après la mesure ? Quels sont alors les résultats possibles d'une mesure de A ? Quelles sont les probabilités associées ? Quels sont les états après la mesure ?
4. On effectue un grand nombre de mesures de l'énergie sur un grand nombre de systèmes identiques tous préparés dans l'état $|\psi\rangle$. Quelle en est la moyenne ?

Problème II

On considère un système à deux niveaux d'Hamiltonien H représenté dans la base canonique $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par la matrice :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le paramètre a est un paramètre réel.
2. Calculer les valeurs propres de H en fonction de a.
3. Calculer la trace et le déterminant de H.
4. Montrer que l'on peut déterminer les valeurs propres de H en connaissant uniquement la trace et le déterminant de la matrice associée.

5. Montrer que les vecteurs propres de H peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} |\chi_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle \\ |\chi_-\rangle = -\sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle. \end{cases}$$

   On donnera l'expression de θ en fonction de a.

6. Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

$$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

   Ecrire le système d'équations différentielles couplées auxquelles obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.

7. En déduire que c_+ et c_- vérifient la même équation différentielle :

$$\ddot{c}_\pm + (\frac{\Omega}{2})^2 c_\pm = 0.$$

   On donnera l'expression de Ω en fonction de a. Quelle est l'interprétation physique de Ω ?

8. Quelle est la solution de ce système d'équations différentielles sachant qu'à $t = 0$, on a $c_+(0) = 1$ et $c_-(0) = 0$.