

PC + PFA

1) Répondre aux questions suivantes:

- Formuler l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.
- Préciser les notions d'état et d'observable, et leur relation avec une mesure dans une expérience. Donner un exemple.
- Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire? et de l'équation de Schrödinger dépendant du temps?
- Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations?
- Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur Hamiltonien?
- Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome d'hydrogène et les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant?
- Expliquer le principe d'exclusion de Pauli.
- Soit $V(x)$ un potentiel pour un système à une dimension. Déterminer le commutateur $[\hat{p}, V(x)]$ ou \hat{p} est l'opérateur correspondant à l'impulsion.

2) Soit $H = \vec{p}^2/2m + V(r)$, $r = |\vec{x}|$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ l'Hamiltonien décrivant une particule dans un champ de force centrale (par exemple un atome d'hydrogène).

- Ecrire les opérateurs correspondant aux trois composantes du moment cinétique \vec{L} .
- Montrer que $[L_3, \vec{L}^2] = 0$. (Indication: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$).
- Etant donné que $[H, L_j] = 0$, $j = 1, 2, 3$, qu'est-ce qu'on peut conclure sur les fonctions propres de H ?

3) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Après le changement de variables

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$$

l'Hamiltonien s'écrit

$$H = \hbar\omega\bar{H}, \quad \bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$$

On définit les opérateurs $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$ et $N := a^\dagger a$.

- Déterminer les relations de commutation $[\bar{x}, \bar{p}]$, $[a, a^\dagger]$, $[N, a]$, $[N, a^\dagger]$.
- Exprimer H en fonction de a et a^\dagger .
- Déterminer les valeurs propres de H .
- Ecrire les deux fonctions propres φ_n de plus basses énergies, explicitement comme des fonctions de la variable x .
- Calculer les valeurs moyennes de la position, de l'impulsion, et de l'énergie cinétique dans l'état fondamental φ_0 .

4) Soit un système physique dont l'espace de Hilbert est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$. Dans cette base, prise dans cet ordre, on considère les opérateurs

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = c \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

où ω, b, c sont des constantes réelles.

- Construire une base de vecteurs propres communs à H, B et C .
- Parmi les ensembles d'opérateurs $\{B, C\}$, $\{H, B\}$, $\{H, C\}$, lesquels forment un ensemble complet d'observables qui commutent (E.C.O.C.)?

1/1