Licence L3 / S6
PFA, PC et SPI-Méca

Seconde session
28 juin 2019

Ondes et Vibrations

Sans document – Durée 2h00 – Calculatrice autorisée – Téléphone portable éteint et rangé

I. Chaîne monoatomique

On considère un cristal qui peut être modélisé par une chaîne monoatomique linéaire infinie constituée d'atomes de masse m et de périodicité a (voir Figure 1). Chaque atome interagit élastiquement avec ses deux plus proches voisins. K représente la constante de couplage. On note u_n le déplacement longitudinal de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre $x_n^o = na$.

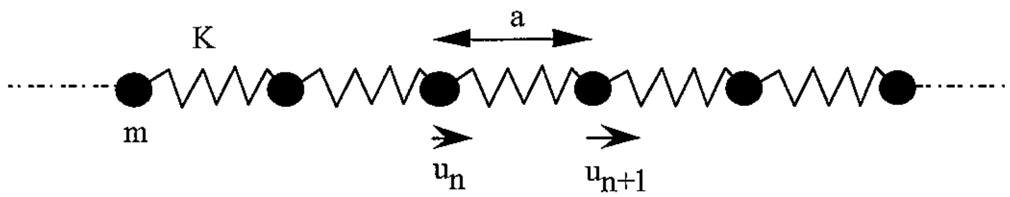

Fig. 1

1. Etablir l'équation du mouvement de l'atome n de la chaîne.

2. Trouver la relation de dispersion associée à l'équation du mouvement précédente. Tracer la courbe de dispersion. Commentaires.

3. On se place à présent dans l'approximation des milieux continus ou des grandes longueurs d'ondes (λ>>a). Dans ce cas les fonctions temporelles discrètes $u_n(t)$ sont remplacées par une fonction unique qui dépend de t mais aussi de façon continue de la variable x, soit $u = u(x,t)$ avec $x = na$ et $a \equiv dx$.
   a) En développant $u(x \pm dx, t)$ jusqu'à l'ordre deux, établir l'équation de propagation des ondes de grandes longueurs d'onde.
   b) En déduire la relation de dispersion associée à cette équation. Tracer la courbe de dispersion. Déterminer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g. Commentaires.

II. Ondes acoustiques

On rappelle que la vitesse des ondes acoustiques dans les gaz est donnée par $c = \dfrac{1}{\sqrt{\chi\rho}}$ où χ est le coefficient de compressibilité isentropique et ρ la masse volumique du gaz. Retrouver l'expression de c pour un gaz parfait. Calculer c pour l'hydrogène à 0°C.
On donne $R = 8.314\ JK^{-1}mole^{-1}$.

III. Ondes hydrodynamiques

En eau peu profonde la relation de dispersion des ondes de gravité hydrodynamiques de faible amplitude est de la forme:

$$\omega = \sqrt{gk\tanh(hk)}\quad , \tag{1}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et h la profondeur d'eau.

1 - Approximer la relation de dispersion (1) dans le cas de l'eau peu profonde ($hk << 1$). On fera un développement de tanh jusqu'à l'ordre 3 et on posera $c_o = \sqrt{gh}$. On rappelle que $\tanh\varepsilon \cong \varepsilon - \dfrac{\varepsilon^3}{3}$ avec ε<<1. Commentaires?

2 - Utiliser la relation de dispersion <u>approximée</u> précédente pour calculer la vitesse de phase v_φ, la vitesse de groupe v_g et le coefficient de dispersion $P = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_g}{\partial k}$. Que deviennent ces trois grandeurs dans le cas particulier k=0 ? Commentaires.