L3 SPI Méca - Mécanique générale

PENDULE EN T

(d'après une idée de D. Chevalier et R. Lamart, L3 - Mention Mécanique)

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère deux systèmes mécaniques rigides T_1 et T_2 en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur défini par : $\vec{g} = -g\,\vec{y}$. Ces deux systèmes sont liés rigidement de manière à former le système noté S.

Les systèmes rigides T_1 et T_2 sont des tiges homogènes de même longueur L, de même masse volumique ρ et donc de même masse m. Les extrémités de la tige T_1 sont notées C et P. Les extrémités de la tige T_2 sont notées A et B. Le centre de masse de T_1 est noté G_1. Le centre de masse de T_2 est noté G_2. L'extrémité P de la tige T_1 est soudée en un point de la tige T_2 de telle sorte que les deux tiges soient perpendiculaires et forment le système S. On note G, le centre de masse de S, a = AP, et ainsi, on a PB = L - a. Le repère orthonormé lié à S est noté $R_s = (P, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{PB} = (L-a)\,\vec{I} \\ \overrightarrow{PC} = L\,\vec{J} \end{cases}$$

On peut ainsi considérer que les repères liés aux tiges T_1 et T_2 sont également R_s.

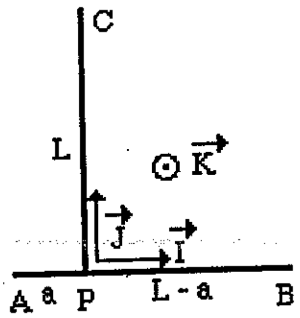
On donne les matrices d'inertie de T_1 et T_2 :

$$\left[J_P(T_1)\right]^{R_s} = \frac{mL^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

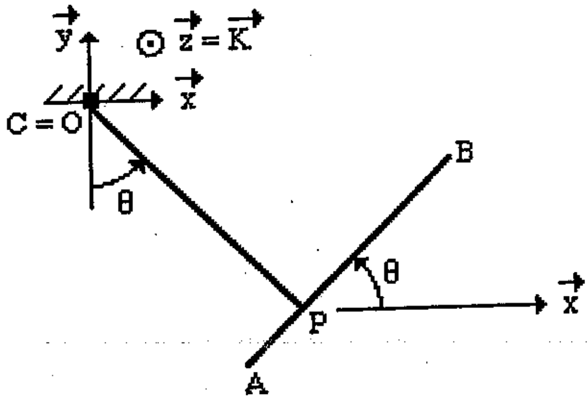
$$\left[J_P(T_2)\right]^{R_s} = \frac{mL^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m\,a\,(L-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'extrémité C de S est attachée à un bâti fixe dont le repère lié est R. La liaison entre S et le bâti est une liaison rotoïde d'axe $(\vec{z})$ et réalisée de telle sorte que C = O et $\vec{K} = \vec{z}$. Ainsi, le mouvement de S est astreint à se produire exclusivement dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$. On pose : $\theta = (\widehat{\vec{x}, \vec{I}}) = (\widehat{\vec{y}, \vec{J}})$.

Le système S est abandonné sans vitesse initiale, à l'instant initial $t_0 = 0$, à partir de la position définie par $\theta(t_0) = \theta_0$.



Les systèmes dans leur repère lié



Les systèmes en mouvement

1. GEOMETRIE DES MASSES

1.1. Calculer la position du centre de masse G du système S dans son repère lié R_s.

1.2. Calculer, en fonction de m, a et L les matrices d'inertie de S en P puis en G:

$$\left[J_P(S)\right]^{R_s} \qquad \left[J_G(S)\right]^{R_s}$$

2. CINEMATIQUE (le repère R_s est utilisé comme repère de projection)

2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G du torseur cinématique de S par rapport à R.

2.2. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point G.

3. CINETIQUE (le repère R_s est utilisé comme repère de projection)

3.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G du torseur cinétique de S par rapport à R.

3.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G du torseur dynamique de S par rapport à R.

3.3. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S par rapport à R.

4. DYNAMIQUE (le repère R_s est utilisé comme repère de projection)

4.1. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction des actions agissant sur S. Pour chacun d'elles, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont elles dérivent. Donner également la valeur de la puissance des efforts intérieurs au sein de S.

4.2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à S. En déduire une équation de la forme $\dot{\theta}^2 = F(\theta) + C$ et une équation de la forme $\ddot{\theta} = \phi(\theta)$. On donnera l'expression précise de F et ϕ en fonction de a, L, g et θ.

4.3. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

4.4. En supposant que l'équation du mouvement soit résolue, c'est-à-dire que la fonctions $\theta(t)$ est connue, montrer que l'on peut en déduire l'expression des éléments de réduction de tous les torseurs des actions mécaniques agissant sur S.

4.5. Montrer que l'application du Principe Fondamental de la Dynamique à S permet d'obtenir à nouveau l'équation $\ddot{\theta} = \phi(\theta)$.

5. ETUDE DES POSITIONS D'EQUILIBRE ET MOUVEMENT PARTICULIER

5.1. On donne l'équation du mouvement (C étant une constante) :

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 = F(\theta) + C \\ F(\theta) = \dfrac{3L}{\dfrac{5\,L^2}{3} - a\,(L-a)}\, g \cos\theta + \dfrac{(L-2a)}{\dfrac{5\,L^2}{3} - a\,(L-a)}\, g \sin\theta \end{cases}$$

Trouver les positions d'équilibre du mouvement et discuter leur stabilité. On traitera le cas général et on donnera explicitement les valeurs dans le cas particulier où $a = L / 2$.

5.2. On souhaite étudier le mouvement particulier du système défini par :

$$\theta(t) = \varepsilon(t) + \theta_E^S \quad \text{où} \begin{cases} \varepsilon(t) \text{ reste voisin de } 0 \\ \theta_E^S \text{ est une position d'équilibre stable} \end{cases}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\left(\varepsilon(t_0 = 0) = \varepsilon_0 = 0,\ \dot{\varepsilon}(t_0 = 0) = \dot{\varepsilon}_0\right)$$

Donner l'équation linéarisée du mouvement.

5.3. Résoudre l'équation et donner la période des oscillations du mouvement.