Examen de Mécanique des fluides - Session 1

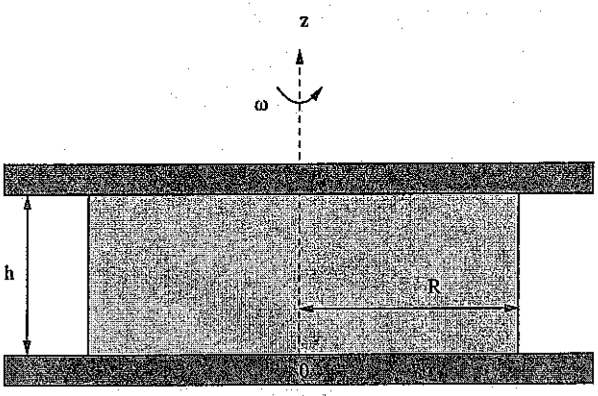
21 Mai 2019 – durée : 2 heures

formulaire mathématique autorisé - calculatrices fournies

Exercice 1

On considère l'écoulement **permanent** d'un film de fluide cylindrique de rayon R et de faible épaisseur h entre deux plaques circulaires parallèles horizontales situées en $z = 0$ et $z = h$. La **plaque inférieure est supposée fixe** tandis que le **plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire** ω (voir figure). Le fluide visqueux entre les deux plaques est **incompressible et newtonien,** de viscosité dynamique μ. Les **actions de volume (forces de pesanteur) sont négligeables,** et on suppose que la vitesse de rotation est suffisamment faible pour que **les termes d'accélération des équations de Navier-Stokes (qui traduisent la variation de la quantité de mouvement) soient également négligeables.**

On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est de la forme $\vec{v} = v_\theta(r, z)\ \vec{e}_\theta$ où v_θ est une fonction inconnue dépendant de r et z que l'on cherche à déterminer. On désigne par p_{atm} la pression atmosphérique en $r = R$ et par $p(r, z)$ la pression dans le fluide que l'on cherche à déterminer également.



1. Vérifier l'incompressibilité du fluide.
2. À l'aide des ~~deux premières~~ équations de Navier-Stokes (2) et (4), montrez que la pression $p(r, z)$ est égale à une constante que l'on précisera. Déduire de l'équation (3) **l'équation aux dérivées partielles** dont v_θ est solution.
3. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme : $v_\theta = f(r)g(z)$.
   — Indiquer les conditions aux limites sur la vitesse en $z = 0$ et $z = h$. Montrer alors que $g(0) = 0$. Montrer ensuite que la fonction $f(r) = \omega\, r/g(h)$.

— Calculez f'' et f'. En utilisant l'expression de f de la question précédente, en déduire que $f' = f/r$.

4. A l'aide de l'équation aux dérivées partielles obtenue dans la question 2, en remplaçant l'expression de f', terminer la détermination de $v_\theta(r,z)$ et montrer que : $v_\theta(r,z) = (\omega r z)/h$.
5. Déterminer l'expression des tenseurs des vitesses de déformation $\bar{\bar{D}}$ et des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$.
6. Calculer le couple C exercé par le fluide sur la plaque supérieure du viscosimètre et dont la mesure permet de déterminer le coefficient de viscosité μ en fonction de ω, R et h.

Formulaire :

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

$$\rho\frac{dV_r}{dt} = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2}\right] \tag{2}$$

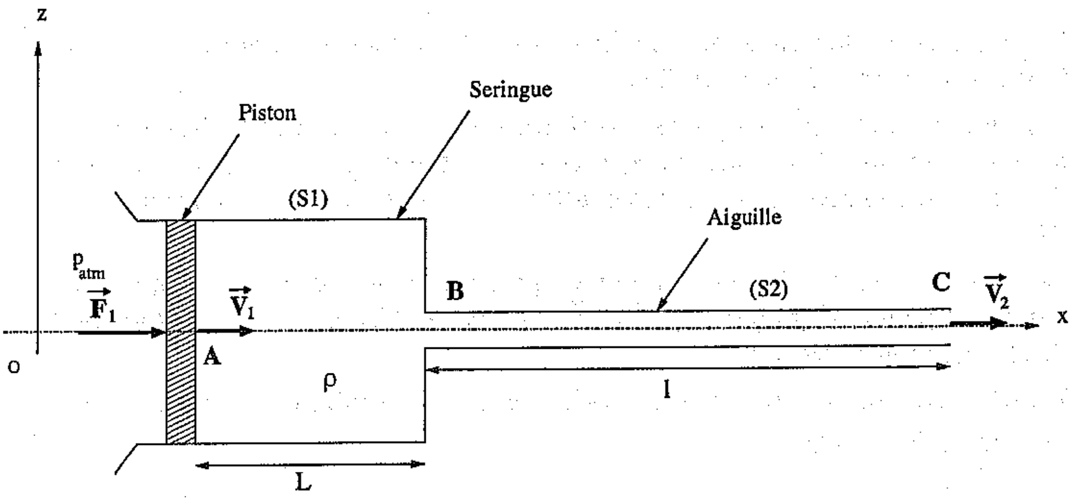
$$\rho\frac{dV_\theta}{dt} = \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right] \tag{3}$$

$$\rho\frac{dV_z}{dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right] \tag{4}$$

$$\bar{\bar{grad}}\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{r,r} & \left(\dfrac{A_{r,\theta}}{r} - \dfrac{A_\theta}{r}\right) & A_{r,z} \\ A_{\theta,r} & \left(\dfrac{A_{\theta,\theta}}{r} + \dfrac{A_r}{r}\right) & A_{\theta,z} \\ A_{z,r} & \dfrac{A_{z,\theta}}{r} & A_{z,z} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Une seringue et son aiguille ouverte à la pression atmosphérique p_{atm} sont placées horizontalement. Elles peuvent être représentées schématiquement par deux cylindres coaxiaux successifs de sections droites S_1 et S_2 et de diamètres D_1 et D_2 respectivement :



On suppose que :
- le piston coulisse **sans frottement** à la vitesse $\vec{V_1}$ **constante** donnée, dans la seringue.
- L'écoulement est permanent, et le fluide est incompressible de masse volumique ρ.
- La section S_1 est très grande devant S_2 : $S_2 << S_1$.
- Les pressions sont constantes dans chaque section droite.

NB : Les résultats doivent être donnés sous forme littérale avant les applications numériques qui seront effectuées pour chaque question en S.I., et les résultats donnés avec une précision de l'ordre de 10^{-3}.

PARTIE A : On néglige la viscosité du liquide dans la seringue et dans l'aiguille

1. Calculer le débit volumique Q_v et le temps T d'écoulement du liquide dans la seringue de longueur utile L.
2. Calculer la vitesse $\vec{V_2}$ du liquide à la sortie de l'aiguille.
3. Déterminer l'expression de la pression p_1 exercée par le fluide en A sur le piston en fonction de p_{atm}, ρ, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_1}$.
4. Faire le bilan des efforts appliqués au piston. (On **ne négligera pas** la pression atmosphérique).
5. Que pouvez vous dire de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la surface du piston en contact avec la seringue ?
6. Que vaut l'accélération du piston (bien lire l'énoncé) ? En déduire l'équation des résultantes du principe fondamental de la dynamique appliqué au piston. Par projection sur l'axe $\vec{x}$, en déduire l'expression de la force $\vec{F_1}$ qu'il faut appliquer au piston pour maintenir sa vitesse $\vec{V_1}$ **constante**.

PARTIE B : On tient compte de la viscosité du liquide dans l'aiguille

1. Le piston se déplaçant toujours à la vitesse $\vec{V_1}$ constante, calculer la vitesse $\vec{V_2'}$ (vitesse moyenne) dans l'aiguille.
2. Il existe maintenant des pertes de charge linéaires dans la seringue de coefficient Λ_1 et dans l'aiguille de coefficient Λ_2. Montrer que la perte de charge linéaire dans la seringue ($S1$) est négligeable par rapport à celle dans l'aiguille ($S2$).
3. Déterminer l'expression de la nouvelle pression p_1' exercée par le liquide en A sur le piston en fonction de p_{atm}, ρ, $\vec{V_2'}$, Λ_2, l et D_2. (On néglige toutes les pertes de charge singulières).
4. En déduire l'expression de la nouvelle force $\vec{F_1'}$ à appliquer au piston pour le maintenir à la vitesse $\vec{V_1}$.

(A.N. : $S_1 = 1\ cm^2$; $S_2 = 0.5\ mm^2$; $V_1 = 3\ mm.s^{-1}$; $L = 12\ cm$;
$l = 10\ cm$; $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$; $p_{atm} = 10^5\ Pa$; $\Lambda_2 = 4.10^{-2}$)