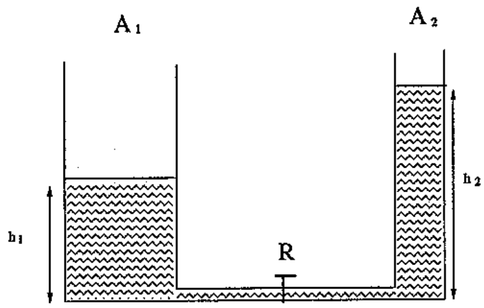
Examen de Mécanique des fluides - Session 2

25 juin 2019 – durée : 2 heures

formulaire mathématique autorisé - calculatrices fournies

I. Deux vases A_1 et A_2 (ouverts à la pression atmosphérique) de sections $S_1 = 50\ cm^2$ et $S_2 = 10\ cm^2$, dont les bases sont dans un même plan horizontal, communiquent par un tube fin de volume négligeable, muni d'un robinet R initialement fermé.

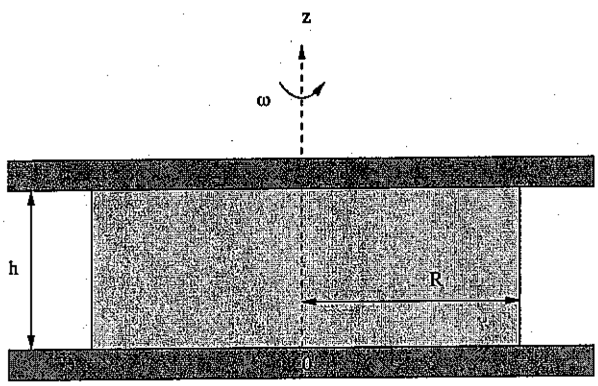
1. (2 pts) On verse un litre de mercure dans le vase A_1 et 0,5 litre de mercure dans le vase A_2. Quelles sont les hauteurs h_1 et h_2 du mercure dans les vases ?
2. (2 pts) Que se passe t'il quand on ouvre le robinet ? Justifier votre réponse et faire un schéma. On note x_1 et x_2 les déplacements des deux niveaux de mercure dans les vases A_1 et A_2. Déterminer x_1 et x_2 (indication : écrire les deux équations liant x_1 à x_2 et x_1, h_1 à x_2, h_2).
3. On verse ensuite 1,5 litres d'alcool dans le vase A_1. On note y_1 et y_2 les déplacements des surfaces du mercure et H_1 la hauteur de la colonne d'alcool. A l'équilibre :
   — (2 pts) faire un schéma représentant les fluides et les différentes cotes : H_1, h_1, h_2, x_1, x_2, y_1 et y_2. Calculer H_1.
   — (2 pts) déterminer le déplacement y_2 du mercure dans le vase A_2,
   — (2 pts) déterminer la dénivellation entre les deux surfaces libres dans A_1 et A_2.



Applications Numériques : $\rho_{alcool} = 0.79\ 10^3\ \ kg.m^{-3}$, $\rho_{Hg} = 13.6\ 10^3\ \ kg.m^{-3}$

II. On considère l'écoulement **permanent** d'un film de fluide cylindrique de rayon R et de faible épaisseur h entre deux plaques circulaires parallèles horizontales situées en $z = 0$ et $z = h$. La **plaque inférieure est supposée fixe** tandis que le **plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire** ω (voir figure). Le fluide visqueux entre les deux plaques est **incompressible et newtonien**, de viscosité dynamique μ. Les **actions de volume (forces de pesanteur) sont négligeables**, et on suppose que la vitesse de rotation est suffisamment faible pour que **les termes d'accélération des équations de Navier-Stokes (qui traduisent la variation de la quantité de mouvement) soient également négligeables.**

On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est de la forme $\vec{v} = v_\theta(r, z)\ \vec{e}_\theta$ où v_θ est une fonction inconnue dépendant de r et z que l'on cherche à déterminer. On désigne par p_{atm} la pression atmosphérique en $r = R$ et par $p(r, z)$ la pression dans le fluide que l'on cherche à déterminer également.



1. (1 pt) Vérifier que le champ des vitesses correspond bien à celui d'un fluide incompressible.
2. (2 pts) À l'aide des deux premières équations de Navier-Stokes (2) et (4), montrez que la pression $p(r, z)$ est égale à une constante que l'on précisera. Déduire de l'équation (3) **l'équation aux dérivées partielles** dont v_θ est solution.
3. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme : $v_\theta = f(r)g(z)$. On note f', f'', g' et g'' les dérivées de f et g.
   - (1 pt) Indiquer les conditions aux limites sur la vitesse en $z = 0$ et $z = h$. Montrer alors que $g(0) = 0$.
   - (0,5 pt)Montrer ensuite que la fonction $f(r) = \omega\ r/g(h)$.
   - (0,5 pt) Calculez f'' et f'. En utilisant l'expression de f de la question précédente, en déduire que $f' = f/r$.
4. (0.5 pt) Réécrire l'équation aux dérivées partielles obtenue dans la question 2 en fonction de f, g f', g'' et r.
5. (1.5 pts) En remplaçant l'expression de f', terminer la détermination de $v_\theta(r, z)$ et montrer que : $v_\theta(r, z) = (\omega r z)/h$.
6. (2 pts) Déterminer l'expression des tenseurs des vitesses de déformation $\bar{\bar{D}}$ et des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$.
7. (1 pt) Calculer le couple C exercé par le fluide sur la plaque supérieure du viscosimètre et dont la mesure permet de déterminer le coefficient de viscosité μ en fonction de ω, R et h.

Formulaire :

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r\, V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho\, V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho\, V_z)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

$$\rho\frac{dV_r}{dt} = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2}\right] \tag{2}$$

$$\rho\frac{dV_\theta}{dt} = \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right] \tag{3}$$

$$\rho\frac{dV_z}{dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right] \tag{4}$$

$$gr\overset{=}{a}d\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{r,r} & \left(\frac{A_{r,\theta}}{r} - \frac{A_\theta}{r}\right) & A_{r,z} \\ A_{\theta,r} & \left(\frac{A_{\theta,\theta}}{r} + \frac{A_r}{r}\right) & A_{\theta,z} \\ A_{z,r} & \frac{A_{z,\theta}}{r} & A_{z,z} \end{pmatrix}$$