

COMPRESSION D'UN TRONC DE CONE

Soit un repère cartésien orthonormé $R_F = (O_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ où $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ est la position d'un point M. On considère un tronc de cône Ω d'axe x_3 et de section droite circulaire Σ . Sa surface latérale est appelée Σ_2 . Il est limité en hauteur par Σ_0 située à $x_3 = 0$ et par Σ_1 située à $x_3 = h$. On note O est le centre d'inertie de Σ (située à l'abscisse x_3) et R son rayon. Les points O_0 et O_1 sont les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 dont R_0 et R_1 sont respectivement les rayons. L'angle au sommet du tronc de cône est noté α . On rappelle que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1 - R_0}{h} = \frac{R - R_0}{x_3}$$

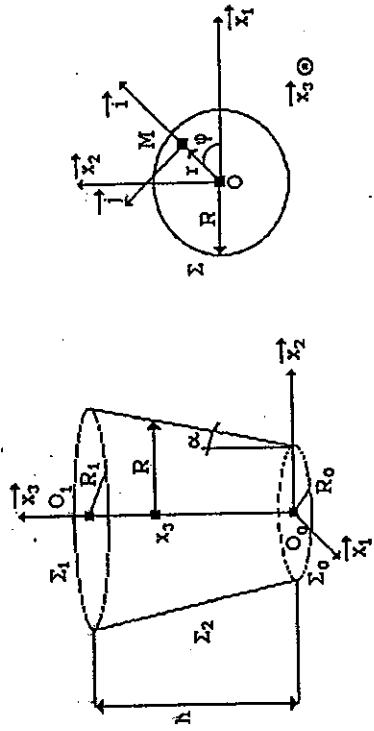
En tout point M de Σ , on définit le repère local en coordonnées cylindriques (r, φ, x_3) par :

$$R_c = (O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{x}_3) \text{ avec } r = \begin{cases} \vec{i} = \cos \varphi \vec{x}_1 + \sin \varphi \vec{x}_2 \\ \vec{j} = -\sin \varphi \vec{x}_1 + \cos \varphi \vec{x}_2 \end{cases}$$

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope dont E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson, (λ, μ) les coefficients de Lamé et ρ la masse volumique.

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que le domaine est en équilibre quasi-statique sous les conditions suivantes :

- les forces de volume sont négligées;
- sur Σ_0 , une densité d'effort connue $\vec{F}_0 = F_0 \vec{x}_3$ est appliquée;
- sur Σ_1 , une densité d'effort connue $\vec{F}_1 = -F_1 \vec{x}_3$ est appliquée;
- Σ_2 est libre d'effort.



1. Trouver, en fonction des caractéristiques géométriques du domaine, la relation qui doit exister entre F_0 et F_1 pour que le système soit effectivement en équilibre global.
2. Ecrire, en coordonnées cylindriques, les équations à résoudre (projetées dans le repère local R_c) si l'on souhaite déterminer en tout point du domaine le champ des contraintes et le champ des déplacements.

3. Le problème ainsi posé rentre-t-il dans le cadre des problèmes généraux d'élasticité ? Discuter l'existence et l'unicité des solutions en contraintes et déplacements.
4. Indiquer pourquoi les solutions du problème doivent être indépendantes de la variable φ .
5. On suppose que la solution en terme de contrainte à la forme suivante :

$$\sigma(r, x_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, x_3) = A(x_3) B(r) & \sigma_{r\varphi}(r, x_3) = 0 & \sigma_{r3}(r, x_3) = \Phi(x_3) \psi(r) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, x_3) = 0 & \sigma_{\varphi\varphi}(r, x_3) = 0 & \sigma_{\varphi 3}(r, x_3) = 0 \\ \sigma_{33}(r, x_3) = \Phi(x_3) \psi(r) & \sigma_{3\varphi}(r, x_3) = 0 & \sigma_{33}(r, x_3) = -\frac{F_0 R_0^2}{(R_0 + x_3 \operatorname{tg} \alpha)^2} \end{pmatrix}$$

- 5.1. Utiliser l'équation d'équilibre local afin de trouver la forme des fonctions Φ, ψ, A et B (on prendra en compte également le fait que si $r \rightarrow 0$ alors les composantes du tenseur des contraintes ne doivent pas être infinies).
- 5.2. Utiliser les conditions aux limites sur Σ_2 pour déterminer les constantes mises en évidence dans la question précédente.
- 5.3. Les conditions aux limites sur Σ_0 et Σ_1 sont-elles vérifiées ? Conclusion ?
6. Calculer, sur chacune des faces du domaine, le tenseur résultant de la densité d'effort induite par le champ de contraintes intuité.
7. Calculer, sur chacune des faces du domaine, le tenseur résultant de la densité d'effort du problème réel.
8. Que peut-on dire du champ de contrainte solution du problème réel par rapport au champ de contrainte intuité ?

FORMULAIRE

• Composantes du tenseur des contraintes et des déformations dans le repère cylindrique

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{r3} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi 3} \\ \sigma_{r3} & \sigma_{\varphi 3} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{r3} \\ \epsilon_{r\varphi} & \epsilon_{\varphi\varphi} & \epsilon_{\varphi 3} \\ \epsilon_{r3} & \epsilon_{\varphi 3} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\epsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)$, $\epsilon_{r3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$

$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$, $\epsilon_{\varphi 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} \right)$, $\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

• Divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux dans le repère cylindrique

$$\text{div } \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial x_3} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{r3}}{r} \end{pmatrix}$$

• Loi de Hooke

$$\epsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbf{I} \Leftrightarrow \sigma = \lambda \text{tr}(\epsilon(\vec{u})) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon(\vec{u})$$