

## EQUILIBRE STATIQUE D'UN BARRAGE HYDRAULIQUE

Soit un repère cartésien orthonormé  $R = (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  où  $x = (x_i)_{i=1,2,3}$  est la position d'un point M. On considère un massif prismatique  $\Omega$ , homogène de masse volumique  $\rho$ , limité par les plans  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = h$  et  $x_3 = \pm L/2$  qui schématise un barrage hydraulique. On suppose que le barrage est en équilibre :

- sous l'action d'une densité volumique d'effort dus à la pesanteur :

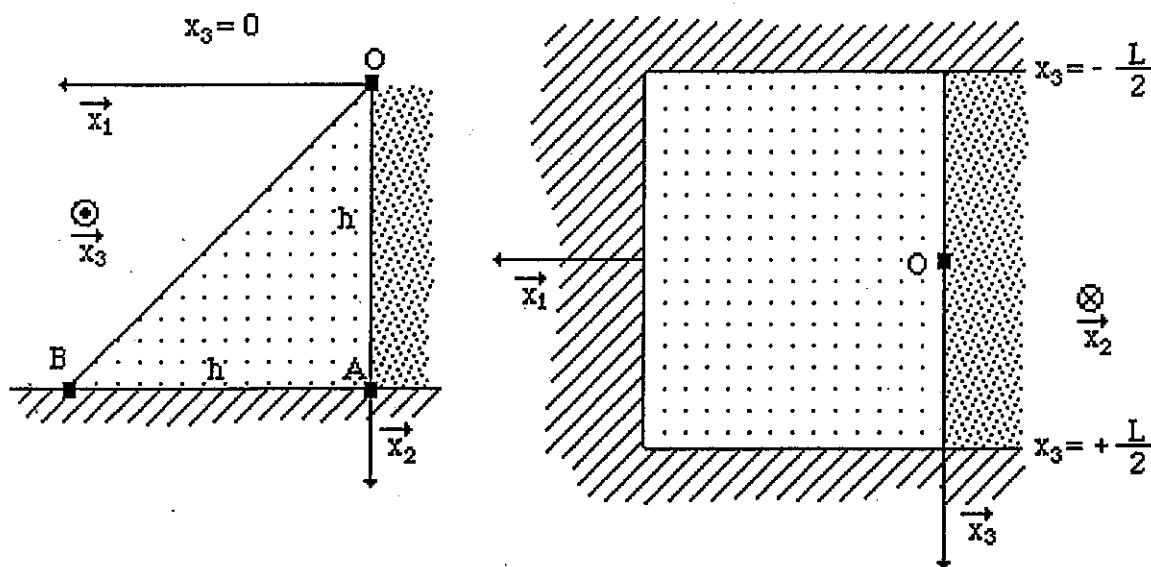
$$\rho \vec{f} = \rho g \vec{x}_2;$$

- sous l'action d'efforts de pression appliqués sur la face  $x_1 = 0$ , représentés par la densité superficielle ( $p$  désignant la pression à  $x_2 = h$ ) :

$$\vec{F} = \frac{p}{h} x_2 \vec{x}_1;$$

- en supposant que la pression de l'air sur la face  $x_1 = x_2$  est négligeable;
- en supposant que la face  $x_2 = h$  est ancrée dans le sol;
- que le déplacement sur les surfaces  $x_3 = \pm L/2$  ne peut être qu'un mouvement de glissement dans le plan  $(x_1 O x_2)$  et que seule la composante suivant l'axe  $(O x_3)$  de la densité d'effort sur ces mêmes faces est non nulle.

On suppose que le problème est symétrique par rapport au plan  $(x_1 O x_2)$ . On suppose que le barrage est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope dont  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé. De plus, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que le problème est symétrique par rapport à l'axe  $(O x_1)$ .



FORMULAIRE : matériau homogène isotrope

$$\text{Loi de Hooke : } \varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{I} \Leftrightarrow \sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon$$

## PARTIE A : équilibre global du barrage

1. Calculer le torseur résultant en O des efforts de pression qui s'exerce sur la face  $x_1 = 0$ .
2. Calculer le torseur résultant en O des efforts de volume qui s'exerce à l'intérieur du barrage.
3. Calculer le torseur résultant en O des efforts qui s'exerce sur la face  $x_2 = h$ .

---

## PARTIE B : équilibre local en chaque point du barrage

1. Ecrire les équations du problème. Ce problème rentre-t-il dans le cadre de la formulation générale des problèmes d'élasticité ? Discuter l'unicité de sa solution en contraintes et en déplacements:
2. On suppose que le champ de contraintes en tout point M du barrage à la forme suivante :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} = ax_1 + bx_2 & \sigma_{12} = a'x_1 + b'x_2 & \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{21} = a'x_1 + b'x_2 & \sigma_{22} = a''x_1 + b''x_2 & \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 & \sigma_{32} = 0 & \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions sur les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $a''$  et  $b''$ , le champ de contraintes donné a-t-il des chances d'être solution du problème ?

3. Calculer le champ de déformations.
4. Calculer le champ de déplacements. A-t-on trouvé la solution du problème en contrainte et en déplacement ?