L3 Méca

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JUIN 2019 - SESSION 2
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Calculer les valeurs propres a_i et les vecteurs propres (normés) correspondants $|u_i\rangle$ de la matrice A en précisant le degré de dégénérescence pour chaque valeur propre.
b) Vérifier le théorème de décomposition spectrale :

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i |u_i\rangle\langle u_i|. \tag{2}$$

c) Calculer alors e^{At} (avec t réel) en utilisant le théorème spectral :

$$f(A) = \sum_{i=1}^{3} f(a_i)|u_i\rangle\langle u_i|, \tag{3}$$

où $f(.)$ est une fonction.

d) Déduire la solution de l'équation différentielle $\frac{d|X\rangle}{dt} = A|X\rangle$ avec $|X(t)\rangle = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $|X(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e) On définit $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que le vecteur $|w\rangle = \gamma|v_1\rangle + \delta|v_2\rangle$ est vecteur propre de A pour tout γ et δ.
Pourquoi ?

Exercice II
a) Donner toutes les solutions possibles de l'équation différentielle réelle, où $y \equiv y(x)$ et k une constante réelle :

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{4}$$

b) On suppose les conditions aux limites $y(0) = y(\ell) = 0$.
Ecrire alors les solutions. Quelle est la conséquence sur les valeurs de k ?
Que représentent physiquement ces solutions ?

Exercice III. Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{5}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale de cette équation et de la condition initiale.
On notera $\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

b) Résoudre l'équation différentielle résultante.

c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Interpréter cette solution.