Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé , 2ème année

Mardi 11 juin 2019
[redacted]
13h30 – 15h30

Examen de Mathématiques Session 2 - Math4B

Exercice 1 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrés d'ordre n à coefficients réels. Que signifie que la matrice A est orthogonale : rappeler une définition de matrice orthogonale.
2. On suppose que $n = 2$. Donner la forme générale des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   (a) Que signifie que f est un automorphisme orthogonal : rappeler une définition d'automorphisme orthogonal.
   (b) Montrer l'équivalence des deux propriétés :
   (i) f est un automorphisme orthogonal.
   (ii) Pour tout sous espace F de E on a $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles d'ordre n muni du produit scalaire

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB}).$$

   Soit $P \in E$ fixé et $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(M) = PM$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que f est un automorphisme orthogonal si et seulement si la matrice P est une matrice orthogonale.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on définit $\beta(u, u') = 2xx' + 2yy' + 5zz' + xz' + x'z + tt' + ty' + t'y$ avec $u = (x, y, z, t) \in E$ et $u' = (x', y', z', t') \in E$.

1. Montrer que β est un produit scalaire sur E et donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $E = \mathbb{R}^4$.
2. Othonormaliser **(pour le produit scalaire** β**)** la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par le procédé de Gram-Schmidt.
3. Soit $F = \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x = z = 0\}$ et soit $a = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$.
   (a) Justifier que F est un sous espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal **(pour le produit scalaire** β**)** de a sur F et calculer la distance $d(a, F)$.
   (c) Déterminer le symétrique orthogonal **(pour le produit scalaire** β**)** de a par rapport à F

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que l'endomorphisme f est symétrique.
2. Rappeler l'énoncé complet et précis du théorème spectral.
3. Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de f et trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPMP$ soit diagonale.
4. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, calculer M^k.

Exercice 4 : Soient E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes symétriques de E. [redacted]

1. Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.
   On suppose pour la suite que $f \circ g = g \circ f$.
2. Justifier que les endomorphismes f et g sont diagonalisables et admettent chacun une base orthonormale de vecteurs propres.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propres de f et $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g.
4. Montrer que f et g admettent une base orthonormale **commune** de vecteurs propres.