Examen 14 Juin 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif.

Questions de cours. (2 points). Vrai ou faux, sans justification.

1. Toute intégrale semi-convergente est absolument convergente.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur I alors la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée.
4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie fermée et bornée de E est compacte.

Exercice 1. (Intégrales généralisées - 6 points). Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$.

1. Calculer $\lim_{t \to 0^+} f(t)$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que
$$\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)\,dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = 2t$.
4. À l'aide de la formule de la moyenne, calculer
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$
En déduire la valeur de I.
5. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$.

Exercice 2. (Suites et séries de fonctions - 7.5 points). Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I = [0, 1]$, on pose
$$f_n(x) = n^a x^n (1 - x).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si $a < 1$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur I. On notera $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in I$.
4. Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur I.
5. Soit $a = 0$, montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $S(x) = x$. Calculer $S(1)$ et en déduire que la série $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur I.
6. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

Exercice 3. (Espaces vectoriels normés - 6 points). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$N(x, y) = \sqrt{9x^2 + 4y^2}.$$

1. Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
3. Montrer que la norme N est équivalente à la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il compact ? Justifiez votre réponse.