Université de Bourgogne
Structures fondamentales

L2 - Math 3E

Année 2018-2019
21 décembre

Contrôle terminal – 2h
Aucun document n'est autorisé.
Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Rappelons que donner un "contre-exemple" consiste à donner un exemple de situation vérifiant les hypothèses de l'énoncé mais pas son hypothétique conclusion. Par exemple, dans l'Exercice 1 il faudrait donner un exemple de groupe G et des exemples G_1 et G_2 de sous-groupes de G tels que l'ensemble donné dans l'énoncé ne soit pas un sous-groupe.

Exercice 1.
Soit G_1 et G_2 deux sous-groupes de G. Les ensembles ci-dessous sont-ils forcément des sous-groupes de G ? En donner une preuve pour ceux qui le sont et donner un contre-exemple pour les autres.
a) $G_1 \cap G_2$, **b)** $G_1 \cup G_2$, **c)** $G_1 \setminus G_2$.

Exercice 2.
Soit $p \geq 1$ un entier et soit x, y deux éléments de G d'ordre p. Montrer que les éléments suivants sont d'ordre fini.
a) x^2, **b)** x^{-1},
c) xy en supposant que G est abélien.
Ces trois éléments sont-ils encore forcément d'ordre p ? Donner des contre-exemples quand ce n'est pas le cas.

Exercice 3.
On suppose que G est un groupe fini d'ordre impaire.
1) Montrer que e est l'unique solution dans G à l'équation $x^2 = e$.
2) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

Exercice 4.
a) Soit G' un deuxième groupe et soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. En partant des définitions d'un morphisme de groupes et d'un sous-groupe, montrer que $\ker(f)$ est un sous-groupe de G.
b) Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et déterminer leur noyau.
i) $f_1 : (\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ définie par $f_1(x) = |x|$.
ii) $f_2 : (\mathbb{R}_+^*, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ définie par $f_2(x) = \log(x)$.

Exercice 5.
Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.
Soit A un anneau commutatif et soit $a_0 \in A$. Les ensembles ci-dessous sont-ils forcément des idéaux de A ? En donner une preuve pour ceux qui le sont et donner un contre-exemple pour les autres.
a) L'ensemble de tous les éléments inversibles de A,
b) l'ensemble de tous les éléments de A qui ne sont pas inversibles,
c) $V = \{y \in A \,|\, ya_0 = 1_A\}$, **d)** $W = \{y \in A \,|\, ya_0 = 0_A\}$.

Rappels de cours

Définition.
Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e. On dit que $H \subset G$ est un *sous-groupe* de G si

i) $e \in H$,
ii) pour tout a, b dans H, ab est aussi dans H,
iii) pour tout a dans H, a^{-1} est aussi dans H.

Définition.
Soit $(F, *)$ et $(H, *')$ deux groupes. Une application $f\colon F \to H$ est un *morphisme de groupes* si pour tout $x, y \in F$, $f(x * y) = f(x) *' f(y)$. De plus, si e_H désigne l'élément neutre de $*'$ alors le *noyau* de f est défini par $\ker(f) := \{x \in F \mid f(x) = e_H\}$.

Rappel.
Si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré respectivement $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ alors le degré de PQ est $\deg(P) + \deg(Q)$. On utilise ici la convention que le degré du polynôme nul est $-\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\infty + n = 0$.