

**Rattrapage - 2h**

Aucun document n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet,  $G$  est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté  $e$ .

Rappelons que donner un "contre-exemple" consiste à donner un exemple de situation vérifiant les hypothèses de l'énoncé mais pas son hypothétique conclusion. Par exemple, dans l'Exercice 1 il faudrait donner un exemple de groupe  $G$  et des exemples  $G_1$  et  $G_2$  de sous-groupes de  $G$  tels que l'ensemble donné dans l'énoncé ne soit pas un sous-groupe.

**Exercice 1.**

Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes de  $G$ . Les ensembles ci-dessous sont-ils forcément des sous-groupes de  $G$ ? En donner une preuve pour ceux qui le sont et donner un contre-exemple pour les autres.

- a)  $G_1 \cap G_2$ ,   b)  $G_1 \cup G_2$ ,   c)  $G_1 \setminus G_2$ .

**Exercice 2.**

a) Soit  $G'$  un deuxième groupe et soit  $f: G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes.

i) En partant des définitions d'un morphisme de groupes et d'un sous-groupe, montrer que  $\ker(f)$  est un sous-groupe de  $G$ .

ii) Montrer que si  $\ker(f) \neq \{e\}$  alors  $f$  n'est pas injectif.

iii) Montrer que si  $\ker(f) = \{e\}$  alors  $f$  est injectif.

b) Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et déterminer leur noyau.

i)  $f_1: (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$  définie par  $f_1(x) = |x|$ .

ii)  $f_2: (\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  définie par  $f_2(x) = \log(x)$ .

**Exercice 3.**

Soit  $p \geq 1$  un entier et soit  $x, y$  deux éléments d'ordre  $p$  de  $G$ . Montrer que les éléments suivants sont d'ordre fini.

a)  $x^2$ ,   b)  $x^{-1}$ ,

c)  $xy$  en supposant que  $G$  est abélien.

Ces trois éléments sont-ils encore forcément d'ordre  $p$ ? Donner des contre-exemples quand ce n'est pas le cas.

**Exercice 4.**

On suppose que  $G$  est un groupe fini d'ordre impair.

1) Montrer que  $e$  est l'unique solution dans  $G$  à l'équation  $x^2 = e$ .

2) Montrer que pour tout  $x \in G$  il existe  $y \in G$  tel que  $y^2 = x$ .

**Exercice 5.**

On suppose que pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ .

a) Montrer que  $G$  est abélien.

b) Donner l'exemple d'un tel groupe.

---

## Rappels de cours

---

### Définition.

Soit  $G$  un groupe dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre  $e$ . On dit que  $H \subset G$  est un *sous-groupe* de  $G$  si

- i)  $e \in H$ ,
- ii) pour tout  $a, b$  dans  $H$ ,  $ab$  est aussi dans  $H$ ,
- iii) pour tout  $a$  dans  $H$ ,  $a^{-1}$  est aussi dans  $H$ .

### Définition.

Soit  $(F, *)$  et  $(H, *')$  deux groupes. Une application  $f: F \rightarrow H$  est un *morphisme de groupes* si pour tout  $x, y \in F$ ,  $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ . De plus, si  $e_H$  désigne l'élément neutre de  $*'$  alors le *noyau* de  $f$  est défini par  $\ker(f) := \{x \in F \mid f(x) = e_H\}$ .