L2-Probabilités, Université de Bourgogne

18 décembre, 2018

Exercice 1 On choisit trois entiers dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Calculer la probabilité que

1) leur somme est impaire,
2) leur produit est impair,
3) la somme est impaire sachant que le produit est impair,
4) le produit est impair sachant que la somme est impaire.

Exercice 2 Une urne contient N boules parmi les lesquels se trouvent N_1 boules blanches, N_2 boules noires et N_3 boules vertes ($N_1 + N_2 + N_3 = N$). On effectue dans l'urne n tirages d'une boule et on définit les variables aléatoires suivantes : X (resp. Y) est le nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues, X_i (resp. Y_i) vaut 1 si le ième tirage donne une boule blanche (resp. noire) et 0 sinon. On suppose que les tirages ont lieu avec remise.

1) Calculer $\mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(Y_j)$ et $\mathbb{E}(X_i \cdot Y_j)$ pour $1 \le i, j \le n$.
2) Calculer la covariance $C(X, Y)$, et les variances σ_X^2 et σ_Y^2.
3) Calculer $\rho(X, Y)$. Montrer que $|\rho(X, Y)| = 1$ implique que $N_3 = 0$.

Rappel : $\rho(X, Y) = \dfrac{C(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$Y = (-1)^X.$$

1) Calculer $\mathbb{P}(\{X = \mathit{pair}\})$ et $\mathbb{P}(\{X = \mathit{impair}\})$.
2) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3) Déteminer la fonction génératrice G_X de X : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ à l'aide de G_X.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi qu'une variable aléatoire X à valeurs entières. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère : $S_n = \max\{X_0, \ldots, X_n\}$.

i) On suppose qu'il existe un entier L tel que $P(\{X \le L\}) = 1$ et $P(\{X = L\}) > 0$. Montrer que pour tout $\ell < L$

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{S_n \le \ell\}) = 0.$$

Montrer que S_n converge en probabilité vers L, lorsque $n \to +\infty$.
ii) On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $T_n = 1/S_n$. Montrer que T_n converge vers 0 en probabilité.

Rappel : On dit qu'une suite de variables aléatoires X_n convergent vers X en probabilité si pour tout $\eta > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \ge \eta\}) = 0.$$