Université de Bourgogne L2 Année 2018-2019

Math3B : Examen - Session 1

Mercredi 18 décembre - Durée 2h00

Questions de cours. (5 points)

1. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Démontrer ce théorème lorsque la dimension est 3 et que la matrice considérée est diagonalisable.

Exercice 1 (4 points)
Indiquer et justifier dans chacun des cas suivants si les matrices sont semblables ou pas.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, et, $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et, $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (5 points)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
2. Calculer le polynôme minimal de A et en déduire si A est diagonalisable ou non.
3. Calculer en fonction de A les projecteurs spectraux associés à chacune des valeurs propres de A.
4. Calculer A^n pour tout entier n.

Exercice 3 (8 points)
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et,} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On admettra sans le démontrer pour la suite que D et N commutent (c'est-à-dire $DN = ND$).

1. Montrer que N est nilpotente et que $A = D + N$.
2. Montrer que $P(X) = (X-2)(X-3)$ est le polynôme minimal de D.

3. En déduire que D est diagonalisable et la décomposition de Dunford de l'endomorphisme de matrice A.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par P.

   Dans la suite les résultats peuvent être présentés sous la forme : $aD + bN + cDN + dI$ où a, b, c et d sont des constantes qui peuvent dépendre de la question et de l'entier n. Bien sûr il faudra expliciter cette dépendance.

5. Calculer D^n pour tout entier n.

6. Calculer A^n pour tout entier n.

7. Calculer $\exp(A)$.