Math3B : Contrôle terminal - Session 2

Lundi 17 juin - Durée 2h00

Questions de cours 1. (4 points)
Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Questions de cours 2. (7 points)
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soient λ une valeur propre de f.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal de f pour que f soit trigonalisable?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal de f pour que f soit diagonalisable?
4. On suppose ici que $P(X) = (X^2+4)(X-3)^2$ est un polynôme annulateur de f.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles du polynôme minimal de f?
   (b) Dans chacun des cas précédents indiquer si f est diagonalisable ou trigonalisable.
   (c) Dans chacun des cas précédents indiquer quelles sont les valeurs possibles du polynôme caractéristique de f.

Exercice 1 (3 points)
Soient les matrices A, B et C suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer lorsqu'elle existe la décomposition de Dunford sur $\mathbb{R}$ des matrices A, B et C.

Exercice 2 (6 points)
On cherche $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\dddot{y}(t) - 4\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) + 4y(t) = 0,$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dot{X}(t) = AX(t)$ où A est une matrice que l'on précisera.
2. Déterminer le rang de $A - 4I$ et en déduire que 4 est valeur propre.
3. Déterminer les valeurs propres de A et en déduire que A se diagonalise.

4. Déterminer les projecteurs spectraux (on pourra les écrire comme un polynôme, à préciser, de la matrice A).

5. Calculer e^{tA} avec $t \in \mathbb{R}$, éventuellement sous la forme d'un polynôme de A.

6. En déduire les solutions de l'équation différentielle.