Analyse – Math3A - L2

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours). On souhaite montrer que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $I = [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Soit $\beta > 0$ et supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in I \times I$ tels que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \beta$. Montrer que f n'est pas continue sur I.
2. En déduire que si f est continue sur I alors f est uniformément continue sur I.
3. Montrer que si f est continue sur I et $\alpha > 0$ alors on peut trouver g, h en escalier sur I par rapport à une subdivision de pas constant, telles que $g \leq f \leq h$ et $|g - h| < \alpha$.
4. En déduire que si f est continue sur I alors f est intégrable sur I.

Exercice 2. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, notons $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Utiliser une somme de Riemann pour montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 2kn + n^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Utiliser un logarithme et une somme de Riemann pour montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}.$$

Exercice 3. Trouver $y = y(x)$, solution pour tout $x \in [0, 1[$ de :

$$x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

Exercice 4. Soit S le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 3} b_n z^n$. Calculer le rayon R de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} b_n z^{3n}$, b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+2}{n+1} z^n$, c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln(1 + \frac{n-1}{n^2}) z^n$.

Calculer la somme de la série b) en z avec $|z| < R$. Dire si la série c) converge en $z = 1$.

Exercice 5 (Nombre d'or et suite de Fibonacci). Soit $f(z) = z/(1 - z - z^2)$.

1. Montrer que f est développable autour de 0 en une série entière $\sum a_n z^n$ dont on calculera le rayon de convergence R.
2. Justifier que, si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, alors :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z(z + z^2)^n.$$

3. Démontrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ pour tout $n \geq 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

5. Calculer la limite de a_n/a_{n-1} lorsque n tend vers l'infini.