Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours). On souhaite montrer que l'intégrale fournit une primitive d'une fonction continue. Soit $a < b$ réels, $I = [a, b]$ et considérons f intégrable au sens de Riemann sur I. Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x \in I$.

1. Soit $x_0 \in [a, b]$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de « ℓ est limite à gauche de f en x_0 ».
2. Donner la définition de « F est dérivable à gauche en x_0 ».
3. Soit ℓ limite à gauche de f en x_0. Montrer que la dérivée à gauche de F en x_0 vaut ℓ.
4. Montrer que, si f est continue sur I, alors F est dérivable sur I et $F' = f$.
5. Soit f somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $\mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les fonctions F_k dont la dérivée k-ième $F_k^{(k)}$ satisfait $F_k^{(k)} = f$.

Exercice 2. Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln((x^2 - 6x + 8)(3 - x)); \qquad g(x) = (\cos(x))^4; \qquad h(x) = \frac{x^7}{x^2 + 2x + 4}.$$

Dire quel est le rayon de convergence de chacun des développements.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1/n + (-a)^n$. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence de (a_n) ? Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} a_n$?
2. Soit désormais $a > 1$. Justifier que $(a_n) \sim (-a)^n$ puis en déduire la valeur de R.
3. Montrer que, si $|z| = R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.
4. Pour tout x dans $]-R, R[$, exprimer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4. Trouver la série entière dont la fonction somme $f(x)$ est solution de :

$$xf''(x) + 2f'(x) = -xf(x), \qquad f(0) = 1.$$

Montrer que f est définie sur tout $\mathbb{R}$ et que $f(\pi/2) = 2/\pi$.

Exercice 5. Soit n un entier.

1. Quelles sont les racines du polynôme $X^2 + 3nX + 2n^2$?
2. A l'aide d'une somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 3nk + 2n^2}.$$