L3 SPI Méca + L3 Phys. PFA

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE - DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JANVIER 2019
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. L'object de cet exercice consiste à écrire la forme générale des matrices unitaires U, $U^\dagger = U^{-1}$ de dimension 2 de déterminant 1. On commence avec une matrice de forme générale :

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1}$$

avec des coefficients a, b, c et d complexes.

a) Exprimer la condition sur ces coefficients lorsque $\det U = 1$.

b) Démontrer que la forme générale s'écrit alors :

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Exercice II

1) Résolution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de FUCHS-FROBENIUS

$$y'' - 2x\,y' + 2\alpha\,y = 0. \tag{3}$$

a) A partir du développement en série $y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$, montrer que l'équation indicielle est

$$k(k-1) = 0. \tag{4}$$

b) En déduire les relations de récurrence possibles entre $a_{\lambda+2}$ et a_λ.

c) Montrer alors que les deux solutions s'écrivent sous la forme

$$y = a_0\left[1 - \frac{2\alpha}{2!}x^2 - \frac{2^2\alpha(2-\alpha)}{4!}x^4 - \frac{2^3\alpha(2-\alpha)(4-\alpha)}{6!}x^6 - \cdots\right] \tag{5}$$

$$y = a_0'\left[x + \frac{2(1-\alpha)}{3!}x^3 + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)}{5!}x^5 + \cdots\right] \tag{6}$$

d) Montrer que ces séries convergent en calculant le rapport des coefficients consécutifs $a_{\lambda+2}/a_\lambda$ dans la limite $\lambda \to +\infty$.

2) Quels choix de valeurs de α conduisent à des solutions sous forme de polynômes de degré fini ?
On note ces polynômes $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ où n désigne leur degré.
Ecrire les cinq premiers polynômes solutions.

Exercice III

On note $\hat{f}(\nu)$ ou $\mathcal{F}_\nu[f(x)]$ la transformée de Fourier de $f(x)$: $\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_\nu[f'(x)] = 2i\pi\nu\mathcal{F}_\nu[f(x)]$, où $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de $f(x)$.

b) Déterminer $\mathcal{F}_\nu[f''(x)]$.

c) Montrer que $\mathcal{F}_\nu[f(x-a)] = e^{-2i\pi\nu a}\mathcal{F}_\nu[f(x)]$.

d) Montrer que $\mathcal{F}'_\nu[f(x)] = -2i\pi\mathcal{F}_\nu[xf(x)]$, où $\mathcal{F}'_\nu[f(x)]$ désigne la dérivée de $\mathcal{F}_\nu[f(x)]$, $\mathcal{F}'_\nu[f(x)] \equiv \frac{d\mathcal{F}_\nu[f(x)]}{d\nu}$.

e) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi(x)$.

f) En déduire la transformée de Fourier de $x\Pi(x)$.

Exercice IV

Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation d'ondes

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x (dans les deux sens).
On note $\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx$ la transformée de Fourier spatiale de $u(x,t)$ et $\hat{f}(\nu)$ la transformée de Fourier de $f(x)$. $\hat{u}(\nu,t)$ définit alors une fonction dans "l'espace de Fourier".
On utilisera les résultats de l'exercice précédent.

a) Montrer que la transformée de Fourier spatiale appliquée sur l'équation (7) donne :

$$(2\pi\nu c)^2\hat{u}(\nu,t) + \frac{\partial^2\hat{u}(\nu,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

b) Résoudre l'équation différentielle résultante en utilisant les conditions initiales exprimées dans l'espace de Fourier.
On utilisera le résultat de l'exercice III.c afin de simplifier l'expression.
c) En déduire la solution $u(x,t)$ par transformée de Fourier inverse.
Interpréter ce résultat.

Rappel. Définition de la distribution porte :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } |x| < 1/2 \\ 0 \text{ pour } |x| > 1/2 \end{cases} \tag{9}$$