**Université de Bourgogne**
L2 Sciences et techniques

Année 2018-2019
10 mai

## Examen de Géométrie. Math 4C

**Exercice 1.** Soit $ABCD$ un tétraèdre dans l'espace affine de dimension 3.

1. On se place dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
   (a) Soit $I$ le milieu de $[BC]$. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points $A$, $I$ et $D$
   (b) Soit $O$ l'isobarycentre des trois points $B$, $C$, $D$. Donner des équations cartésiennes de la droite $(AO)$
   (c) Soit $J$ le milieu de $[AB]$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $J$ et dirigé par $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{JC}$.
   (d) Déterminer les coordonnées du point $G$ à l'intersection de $\mathcal{P}$ et $(AO)$.
   (e) Que pouvez vous dire sur $G$ ?
2. On se place dans le repère affine $(A, B, C, D)$.
   (a) Pour l'une des droites passant par $G$ et un sommet du tétraèdre, exprimer en termes de barycentres l'appartenance d'un point $M$ à cette droite.
   (b) En quel point l'une des droites précédentes intersecte-t-elle la face opposée au sommet ? Justifier.
   (c) Exprimer $G$ comme barycentre des points $A$, $I$, $D$.

**Exercice 2.** Soit $ABCD$ un carré direct du plan affine euclidien. Caractériser la similitude directe $\sigma$ de centre $A$ envoyant $B$ sur $C$.

**Exercice 3.** Soient $ABCD$ un quadrilatère du plan affine euclidien et $M_1$, $M_2$ $M_3$ et $M_4$ des points extérieurs au quadrilatère $ABCD$ tels que les triangles $ABM_1$, $BCM_2$, $CDM_3$ et $ADM_4$ sont isocèles rectangles en $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. Montrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux de même longueur.

**Exercice 4.** Soient $A$, $B$, $C$ trois points non alignés dans le plan affine. Un point $M$ décrit le segment $[AB]$ et un point $N$ décrit le segment $[AC]$. Quel est le lieu décrit par le milieu du segment $[MN]$ ?

**Exercice 5.** *On rappelle les énoncés des théorèmes de Ménélaüs et de Céva. Soit $ABC$ un triangle non aplati dans un plan affine, et soient $A_0$, $B_0$ et $C_0$ des points respectivement de $(BC)$, $(AC)$ et $(BA)$ distincts de $A$, $B$ et $C$.*

*<u>Théorème de Ménélaüs.</u> Les points $A_0, B_0, C_0$ sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{B_0C}}{\overline{B_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0A}}{\overline{C_0B}} = 1.$$

*<u>Théorème de Céva.</u> Les droites $(A_0A)$,$(B_0B)$,$(C_0C)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{B_0C}}{\overline{B_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0A}}{\overline{C_0B}} = -1.$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser les théorèmes de Ménélaüs et de Céva, ainsi que le théorème de Thalès (on pourra considérer par exemple la droite parallèle à $(A'B')$ passant par $A$) ou utiliser les barycentres.

Soit $ABC$ un triangle. Soient $A'$ un point de $[BC]$, $B'$ un point de $[AC]$ et $C'$ un point de $[AB]$. On suppose de plus que les droites $(AB)$ et $(A'B')$ sont sécantes en $P$, les droites $(BC)$ et $(B'C')$ sécantes en $Q$, et les droites $(AC)$ et $(A'C')$ sécantes en $R$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\Big(P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés}\Big) \text{ si et seulement si } \Big((AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes}\Big).$$