Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2018-2019.
L2, Mathématiques pour la Physique et la Chimie IV - MaPC4A.

Examen du 17 juin 2019, 10h30-12h30, session 2.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Dessiner les sous-ensembles suivants du plan complexe $\mathbb{C}$:

a. $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) + 1\}$

b. $\{z \in \mathbb{C} | |z - 1| > 1\}$

c. $\{z \in \mathbb{C} | \arg(z) = \frac{\pi}{2}\} \cap \{z \in \mathbb{C} | |z - i| < \frac{1}{2}\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} | |z| > |z + 1|\}$

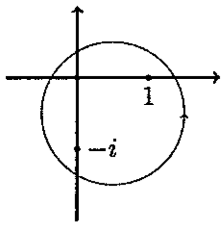
2. Trouver le rayon de convergence de la série entière centrée en 0 suivante :

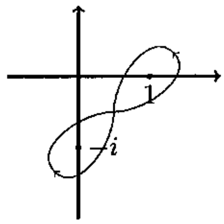
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} z^n.$$

3. Calculer l'intégrale de chemin

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z(z-1)(z+i)} dz$$

en utilisant la formule de Cauchy pour les deux chemins γ suivants :





4. Déterminer la nature de tous les points singuliers de la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 - 1)(z^2 - 1)}.$$

5. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'intégrale suivante :

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(z)}{z^3} dz.$$

6. Calculer l'intégrale suivante en utilisant les méthodes de l'analyse complexe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3 + i} dx.$$