

Examen

18 décembre 2018; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.

- a) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et F un champ de vecteur différentiable $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Donner la définition du jacobien de F et de la divergence de F .
- b) Pour $n = 3$ donner la définition du rotationnel de F .
- c) Démontrer que si F est deux fois différentiable $\operatorname{div}(\operatorname{rot}F) = 0$.

Ex 2. Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \langle x \wedge a, x \wedge b \rangle,$$

où $a, b \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 6x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Calculer l'intégrale

$$\int \int_D (x - y)^2 dx dy,$$

où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 2; \quad 2y = x; \quad y = -x.$$

Ex 5. Déterminer l'aire et la position du centre de masse d'un quart de disque défini par

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$