Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et techniques
Département de mathématiques

Année universitaire 2018-19

L2-IE Mathématiques
Examen du 11 Juin 2019

Documents, calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques interdits.

Les résultats doivent être justifiés. Les affirmations sans preuve ne seront pas prises en compte.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A (ou f).

2. Déterminer les sous-espaces $\mathrm{Im}f$ (donner une équation cartésienne) et $\ker f$ (donner une base). Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f \oplus \ker f$.

3. Calculer le polynôme caractéristique de f (ou A) ; f est-il diagonalisable ?

4. On introduit les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (u_2, u_3) est une base de $\mathrm{Im}f$. Quelle est la matrice de f dans cette base (on calculera les images de ces vecteurs par f).

5. Calculer la matrice de f^4 dans la base (u_1, u_2, u_3) et interpréter géométriquement l'endomorphisme f^4.

Exercice 2

Soit $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Combien y a-t-il :
1) de parties de X à 4 éléments ?
2) de parties de X à 4 éléments contenant $\{1, 5\}$?
3) de parties de X à 4 éléments disjointes de $\{3, 4\}$?
4) de parties de X à 4 éléments contenant $\{1, 5\}$ et disjointes de $\{3, 4\}$?

Exercice 3

Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ la courbe paramétrée par $t \mapsto (\ln(1+t), \frac{t}{1+t})$ pour $t > -1$.

1. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $t = 0$.

2. Exprimer la longueur de l'arc de courbe compris entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = 1$ sous forme d'une intégrale.

3. Calculer la courbure au point de paramètre $t = 0$.

4. Montrer que l'image de Γ est la courbe d'équation cartésienne $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et tracer cette courbe.

Exercice 4

Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.
Soit E un ensemble de cardinal n et (A, B) une partition de E, c'est à dire : $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$. On note $n = |E|$, $p = |A|$ et $q = |B|$.

1. Rappeler la formule donnant $|X \cup Y|$. Quelle relation y a-t-il entre n, p et q ?

2. Que valent $|\mathcal{P}(E)|$, $|\mathcal{P}(A)|$, $|\mathcal{P}(B)|$ et $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$?

3. Soient les applications :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) &\to \mathcal{P}(E) \\ (X, Y) &\mapsto X \cup Y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ Z &\mapsto (Z \cap A, Z \cap B) \end{aligned}$$

Montrer que ce sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

4. Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}_i(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal i ($i \geq 0$). Donner la valeur de $|\mathcal{P}_i(X)|$ en fonction de $|X|$ et i.

5. Pour $k \geq 0$, on pose $F = \cup_{i+j=k} \mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_j(B)$. Montrer que cette union est disjointe et donner $|F|$.

6. Montrer que $\phi(F) = \mathcal{P}_k(E)$ et en déduire que :

$$\sum_{i+j=k} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \binom{n}{k}.$$

Donner la relation obtenue pour $k = 1$ et $k = 2$.