UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Sciences & Techniques

Licence Deuxième année.
Mathématiques MaIE3A
Examen du 18/12/2018 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculettes et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1

1) Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$.

   1-a) Calculer $P(2)$. Déterminer les nombres a, b, c tels que $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.

   1-b) Calculer les racines de P.

2) Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, u, v), on considère l'application T de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

   2-a) Caractériser géométriquement l'application T.

   2-b) Soient A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et $A' = T(A)$. Déterminer sous forme algébrique et sous forme exponentielle $z_{A'}$, affixe de A'.

   2-c) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\Pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\Pi}{12})$

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$M(t)\begin{cases} x(t) &= 2\ln(1+t) - 2t \\ y(t) &= e^t - t \end{cases}$$

1) Donner un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = 0$.

2) En déduire les coordonnées du point stationnaire. Dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.

Exercice 3

1) Calculer $I = \int_1^e x^3 \ln x dx$

2) Calculer $J = \int_0^\pi x \sin(x) dx$

3) On veut calculer $K = \int \frac{x^3}{x^2+x-12} dx$

   3-a) Vérifier que : $\frac{x^3}{x^2+x-12} = x - 1 + \frac{13x-12}{x^2+x-12}$

   3-b) Déterminer a, b tels que : $\frac{13x-12}{x^2+x-12} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+4}$. En déduire K.

Exercice 4

Pour étudier l'établissement du courant dans une bobine d'inductance L, on la branche en série avec une résistance R, un générateur de force électromotrice constante V et un interrupteur.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le générateur débite alors dans le circuit un courant dont l'intensité $i(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) : $L\frac{di}{dt} + Ri = V$ ($t \geq 0$ est le temps).

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) et une solution particulière $i_p(t)$ de (E).

2) Sachant qu'à l'instant $t = 0$ on a : $i(0) = 0$, déterminer $i(t)$.

3) Déterminer la tension $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$ aux bornes de l'inductance .

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E) : y" + 2y' + y = x^2 e^{-x}$.

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

2) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $y_p = e^{-x}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à chercher. En déduire les solutions de (E)