

Licence deuxième année.
Mathématiques MaIE3A
Examen du 14/06/2019 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculatrices et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1 (5 points)

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

- 1) 1-a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$
1-b) Donnez les solutions sous forme exponentielle.
1-c) Placez dans \mathcal{P} leurs images A et B , A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est positive. Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle?
- 2) On considère l'application \mathcal{R} de \mathcal{P} dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = iz$. Caractériser géométriquement l'application \mathcal{R} . Déterminer l'image $\mathcal{R}(B)$ de B .

Exercice 2 (5 points)

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases}$$

- 1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
- 2) Déterminer le point stationnaire. Dessiner l'allure de la courbe en ce point en précisant le sens de déplacement.
- 3) Étudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.
- 4) Étudier les branches infinies en $\pm\infty$.
- 5) Dessiner la courbe.

Exercice 3 (5 points)

- 1) Calculer $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$
- 2) Soient $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.
 - 2-a) Calculer $I_2 + I_3$.
 - 2-b) Calculer $I_2 - I_3$. On posera $u = \cos x + \sin x$.
 - 2-c) En déduire I_2 et I_3 .

Exercice 4 (5 points)

On note (E) l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$

- 1) Déterminer la solution générale $y_0(x)$ de l'équation sans second membre (E_0) .
- 2) Chercher une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p = e^{-2x} Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer.
- 3) En déduire la solution générale de (E) .