MaIE 4A

Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et techniques
Département de mathématiques

Année universitaire 2018-19

L2-IE Mathématiques
Examen du 9 Mai 2019

Documents, calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques interdits.

Exercice 1

Soit la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(M - \mathrm{I}_3)(M + 3\mathrm{I}_3)$ où I_3 est la matrice unité 3×3. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1} : on donnera M^{-1} en fonction de M puis en explicitant ses coefficients.

2. Montrer que $M - \mathrm{I}_3$ et $M + 3\mathrm{I}_3$ ne sont pas inversibles. En déduire que 1 et -3 sont valeurs propres de M.

3. Calculer le polynôme caractéristique de M. Quelles sont les valeurs propres de M ? Déterminer les sous-espaces propres de M. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$. On définit la matrice $M_{A_1,A_2} \in \mathfrak{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ de la façon suivante : le coefficient d'indice (i,j), $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n$ est égal à $\mathbf{1}_{A_i}(j)$ où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de la partie A.

2. Exemple : on prend $n = 7$, $A_1 = \{1,3,4,6\}$ et $A_2 = \{2,4,7\}$; donner la matrice M_{A_1,A_2}.

On définit les ensembles :

$$\mathcal{F} = \{(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid A_1 \subset A_2\}$$

$$\mathcal{G} = \{(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid A_1 \cap A_2 = \emptyset\}.$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les colonnes de M_{A_1,A_2} pour que (A_1, A_2) appartienne à $\mathcal{F}$. En déduire le cardinal de $\mathcal{F}$.

4. Mêmes questions pour $\mathcal{G}$.
Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{F}$, on définit $\Phi(A_1, A_2) = (A_1, A_2 \setminus A_1)$ et si $(A_1, A_2) \in \mathcal{G}$, on définit $\Psi(A_1, A_2) = (A_1, A_1 \cup A_2)$.

5. Montrer que Φ est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ et que Ψ est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$. Montrer que Φ et Ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 3

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ la courbe paramétrée $t \mapsto (1 + t + t^2/2, e^t)$.

1. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre 1.

2. Déterminer la courbure au point de paramètre 1 ainsi que les coordonnées du centre de courbure.

Exercice 4

1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{P}_2(E)$ l'ensemble des parties de E à deux éléments. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}_2(E)$?

2. Soit G_1 le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathcal{P}_2(E)$ et où il y a une arête entre A et B si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Combien y a-t-il d'arêtes issues de chaque sommet ? Numérotez les sommets et les arêtes comme bon vous semble et donnez les matrices d'adjacence et d'incidence de G_1 pour cette numérotation.

3. Soit G_2 le graphe ayant le même ensemble de sommets que G_1 et où il y a une arête entre A et B si et seulement si $|A \cap B| = 1$. Reprendre les questions de **2.** dans le cas de G_2.