

Examen Session 2 - Lundi 17 juin 2019 (1 heure)

2 exercices à traiter - Document recto-verso - Calculatrices non autorisées

Exercice 1 : Questions de cours ($\approx 60\%$)

1) On discrétise la coordonnée $x \in [a, b]$ en $N + 1$ points régulièrement espacés de la quantité h appelée pas de discrétisation.

1.1) Montrer que les valeurs de $x = (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1})$ sont données par la relation :

$$x_i = a + (i - 1) \times h \text{ avec } h = \frac{(b - a)}{N}$$

1.2) En TD, 3 différentes manières de discrétiser la coordonnée $x \in [a, b]$ en $N + 1$ points régulièrement espacés de la quantité h en langage MATLAB/Octave ont été présentées. En donner la syntaxe pour 2 d'entre elles.

2) Soit \tilde{x} une approximation d'un nombre réel x .

2.1) Rappeler les définitions de l'erreur absolue e_{abs} et relative e_{rel} en fonction de x et \tilde{x} .

2.2) Quelle erreur parmi les deux définies ci-dessus est privilégiée pour évaluer la précision d'un résultat et pourquoi?

3) Rappeler la différence entre l'interpolation et l'approximation de données. De plus, citer une méthode numérique d'interpolation vue en CM et en TD.

4) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , a un point intérieur à I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On fixe n un entier naturel. On rappelle la formule de Taylor pour une fonction f de classe C^n sur un intervalle I : Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$, on peut écrire :

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + O(h^{n+1})$$

4.1) A l'aide de la formule de Taylor donnée ci-dessus, exprimer $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$ à l'ordre $n = 2$.

4.2) Sachant que $f(x_i + h) = f(x_{i+1})$ et $f(x_i - h) = f(x_{i-1})$, en déduire que :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

4.3) Comment s'appelle cette formule de dérivation numérique?

5) Soit le système d'équations linéaires sous forme matricielle $AX = B$ avec A une matrice tridiagonale.

5.1) Rappeler la définition d'une matrice tridiagonale.

5.2) Quelle méthode vue en CM et implémentée en TD permet de résoudre un tel système de manière simple et rapide?

Tournez la feuille pour l'exercice 2 →

Exercice 2 : Programmation ($\approx 40\%$)

Rappel : Soit $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ un ensemble de N valeurs. La moyenne M_Y , la variance V_Y et l'écart-type S_Y sont calculées à partir des formules suivantes :

$$M_Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k \quad ; \quad V_Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - M_Y)^2 \quad ; \quad S_Y = \sqrt{V_Y}$$

1) Écrire une fonction MATLAB/Octave qui retourne ces 3 paramètres statistiques M_Y , V_Y et S_Y à partir de l'ensemble des valeurs Y_i . L'utilisation des fonctions MATLAB/Octave existantes telles que `mean(Y)` et `var(Y)` n'est pas autorisée. Cette fonction MATLAB/Octave appelée `stat` aura pour en-tête :

```
function [MY,VY,SY]=stat(Y)
...
end
```

L'input de cette fonction `stat` est le vecteur Y contenant les N valeurs et les outputs sont respectivement la moyenne M_Y , la variance V_Y et l'écart-type S_Y .

2) Écrire le code correspondant à la partie test sur l'ensemble de données suivant : $Y = [12, 8, 9, 14, 17, 16]$.