Contrôle terminal - Lundi 6 mai 2019 (1 heure)

3 exercices à traiter - Document recto-verso - Calculatrices autorisées

Exercice 1 (≈ 20%)

QCM : 1 seule bonne réponse par question. Pas de justification demandée. Aucun calcul fastidieux n'est nécessaire pour répondre aux questions donc soyez malins :)

Questions	Réponses
1. On calcule une approximation de $\sqrt{10}$ par la méthode de dichotomie. Pour cela, on résout l'équation $f(x) = x^2 - 10 = 0$ sur l'intervalle $I_0 = [3;4]$. Après 5 itérations, la racine de f est comprise dans l'intervalle :	☐ $I_5 = [3.15625; 3.1875]$ ☐ $I_5 = [3.125; 3.15625]$ ☐ $I_5 = [3.125; 3.25]$
2. La dérivée numérique donnée par la formule suivante est appelée différence finie : $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	☐ à gauche ☐ à droite ☐ centrée
3. Soit 3 points d'abscisses $x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$ et $x_3 = 4$. Le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aux 3 points x_1, x_2 et x_3 est donné par :	☐ $P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x - 1.15$ ☐ $P_2(x) = -0.05x^2 - 0.425x + 1.15$ ☐ $P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$
4. Lors de la régression linéaire d'un nuage de points (X,Y) par la méthode des moindres carrés, le coefficient directeur α est donné par :	☐ $\alpha = \dfrac{cov(X,Y)^2}{var(X)var(Y)}$ ☐ $\alpha = \bar{Y} - \beta\bar{X}$ ☐ $\alpha = \dfrac{cov(X,Y)}{var(X)}$

Exercice 2 (≈ 40%)

On souhaite utiliser la méthode de Newton pour résoudre une équation non linéaire du type $f(x) = 0$. Pour rappel, la méthode de Newton est définie par la suite :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{cases}$$

1) Décrire par un schéma le calcul des itérations successives par la méthode de Newton.

2) Quel est le test d'arrêt sur cette méthode si on recherche la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec une certaine tolérance ϵ?

3) On dispose d'une fonction MATLAB/Octave d'en-tête `function racine=newton(f,df,x0,eps)` comme implémentée en TD. Écrire la partie test du script MATLAB/Octave qui permet de trouver x tel que $cos(x) = x$ sur l'intervalle $[0;1]$ avec une tolérance $\epsilon = 10^{-6}$.

Tournez la feuille pour l'exercice 3 →

Exercice 3 (≈ 40%)

On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante par la méthode des trapèzes :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Pour cela, on discrétise l'intervalle $[a,b]$ en $N+1$ points x_i, $i = 1,...,N+1$ avec un pas de discrétisation $h = (b-a)/N$.

1) Montrer que la valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes est donnée par :

$$I_T = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=2}^{N} f(x_i)\right)$$

2) Écrire la fonction MATLAB/Octave correspondante à la méthode des trapèzes dont l'en-tete est donné par : `function IT=inttrap(f,a,b,N)`.

3) Calculer numériquement l'intégrale par la méthode des trapèzes pour $N = 1$ et $N = 2$. En déduire l'erreur relative (arrondie au %) dans les deux cas, sachant que la valeur exacte de $I = ln(2)$.

4) A partir des résultats de la question 3), justifier que la méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 2.