Session 2 - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2018-2019

Tous les documents sont autorisés

Partie I (8pts)

Exercice 1 (4pts):

A. Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

- $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 25 \cdot a_{n-2} & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$
- $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2 \\ b_{n-1} + 25 \cdot b_{n-2} - 25 \cdot b_{n-3} & \text{si} \quad n \geq 3. \end{cases}$

B. Quelle relation existe entre la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 (2pts): Trouver la forme close et la fonction génératrice pour la suite :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3 \cdot c_{n-1} - 1 & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3 (2pts): Trouver le nombre d'entiers entre 1 et 1 000 000 qui ne sont pas des carrés ni des cubes.

Partie II (12pts)

Exercice 4 (9pts): Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties non vides de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si A est une partie non vide de $[n]$, son plus grand élément est noté $max(A)$, et son plus petit élément est noté $min(A)$. On définit la relation binaire suivante sur $\mathcal{P}_n$: si A et B sont deux éléments de $\mathcal{P}_n$,

$$A \leq B \iff A = B \text{ ou } max(A) \leq min(B) \text{ si } A \neq B.$$

1. Que peut-on dire de A lorsque $max(A) = min(A)$?
2. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_n$.

3. Dessiner les diagrammes de Hasse pour $n = 2, 3$ et 4.
4. Pour n quelconque, l'ensemble $\mathcal{P}_n$ muni de la relation $\leq$ a-t-il un plus petit ou plus grand élément?
5. Soit $a \in [n]$. Quels sont les successeurs et les prédécesseurs de $\{a\}$ dans $\mathcal{P}_n$ (on discutera suivant la valeur de a).
6. Dessiner les relations de couvertures existantes entre les parties $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{n\}$.
7. Pour $n \geq 1$, est-ce que $\mathcal{P}_n$ est un treillis? Pourquoi?
8. Est-ce un treillis distributif? Pourquoi?

Exercice 5 (3pts): Donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante:

$$f(a, b, c, d) = (a \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a} \vee d).$$