

EXAMEN LICENCE 2, MODULE I3A, 2018

Info 3A

LA COPIE EST NOTEE ZERO DES QU'IL Y A UN PROGRAMME. AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISE A PART VOTRE COPIE ET UNE FEUILLE A4 RECTO VERSO. AUCUN INSTRUMENT ELECTRONIQUE N'EST AUTORISE.

1 Algorithme d'Euclide généralisé

1. Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 81$ et $b = 48$. Calculez aussi deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez une présentation sous forme de tableau, avec des colonnes a , b , q , r , u , v , g , comme en TD ($q = \lfloor a/b \rfloor$, $r = a \bmod b$). Dans la dernière ligne, u vaut 1 et v vaut 0 (et non k).
2. Même question, mais dans la dernière ligne, u vaut 1 et v vaut k .

2 k ième élément d'un ensemble non trié

Il faut trouver le k ième élément (avec $1 \leq k \leq n$) dans un ensemble non trié (représenté par un tableau ou une liste) de n éléments. Si $k = 1$, c'est le plus petit élément de l'ensemble, et si $k = n$, c'est le plus grand élément de l'ensemble. On utilise la méthode suivante. Si $k = n = 1$, c'est trivial. Sinon, un élément est choisi aléatoirement et sert de pivot. On calcule I le sous-ensemble des éléments inférieurs ou égaux au pivot, et G le sous-ensemble des éléments plus grands que le pivot. On note $|I|$ le nombre d'éléments

de I . Si $|I| \geq k$, alors il faut trouver le k ième élément de I . Sinon, il faut trouver le $k - |I|$ ième élément de G . Vous supposerez que I et G sont approximativement de mêmes tailles – et que tous les éléments sont différents pour simplifier.

1. Quelle est la formule récursive (ou de récurrence) pour la complexité de cet algorithme? $T(1) = 1, T(n) = \dots$? La complexité ne dépend pas de k mais vous pouvez supposer $k = n/2$ si nécessaire.
2. Quelle est la solution de cette équation de récurrence? Est-ce $O(1), O(n), O(n \log n), O(n^2)$, ou quelque chose d'autre?

3 Etude de complexité

1. Un algorithme a une complexité donnée par : $T(1) = 1, T(n) = 5T(n/2)$. Sa complexité est $O(n^x)$, que vaut x ?

Pour les questions 2, 3, 4, 5 : Un algorithme a une complexité donnée par : $T(1) = 1, T(n) = 5T(n/2) + n$. On note $k = \log_2 n \Leftrightarrow 2^k = n$, et $t(k) = T(n)$. Le tableau suivant peut vous aider :

n	1	2	4	8	16
$k = \log_2(n)$	0	1	2	3	4
$t(k) = T(n)$	1	7	39	203	1031
5^k	1	5	25	125	625

2. Le vecteur $(T(n), n)^t$ (t pour transposée) est le produit d'une matrice M par le vecteur $(T(n/2), n/2)^t$, que vaut la matrice M ?
3. Exprimez $(T(n), n)^t$ en fonction de M et de $(T(1), 1)^t$.
4. Quelles sont les deux valeurs propres λ, λ' de la matrice M ? $\lambda > \lambda'$.
5. On sait que $T(n) = t(k) = a\lambda^k + b(\lambda')^k$ pour des constantes bien choisies a et b . Comme $T(1) = 1$ et $T(2) = 7$, déduisez-en a et b . Donnez les valeurs de a et b . Vérifiez qu'elles sont cohérentes avec le tableau.