Examen - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2018/19

Tous les documents sont autorisés

Partie I (7pts)

Exercice 1 (4pts): A. Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ -1 & \text{si} \quad n = 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & \text{si} \quad n \geq 2, \end{cases} \quad \text{et } b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ -1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 2 \\ -b_{n-1} - b_{n-2} - b_{n-3} & \text{si} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

B. Quelle relation existe entre la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 2 (1pt): Trouver la forme close et la fonction génératrice pour la suite :

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 3 \cdot c_{n-1} + 2^{n-2} & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3 (2pts): Un employé veut travailler 5 jours par semaine mais il veut garder au moins le samedi ou le dimanche libre. Combien de possibilités aura-t-il comme choix ?

Combien de mots ternaires sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ ont au moins une occurence de 0 et une de 1 ?

Partie II (13pts)

Exercice 5 (4pts): Soit E l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des entiers positifs ou nuls inférieurs strictement à 13. On définit sur E la relation $(x, y) \sim (u, v) \iff 2$ divise $u - x$ et 3 divise $v - y$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Déterminer l'ensemble quotient $E/_{\sim}$.

Exercice 6 (6pts): On considère la relation $\mathcal{S}$ définie sur l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont deux entiers strictement positifs: $(x, y)\mathcal{S}(a, b)$ si et seulement si on a l'une des deux propriétés suivantes (i) $x = a$ et y divise b, ou bien (ii) $x < a$.

1) Est-ce une relation d'ordre?

2) Dessiner le diagramme de Hasse pour l'ensemble des couples (x, y) où $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$.

3) Est-ce un treillis? Si oui, est-il distributif?

Exercice 7 (3pts): En utilisant la méthode des tableaux de Karnaugh, donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante.

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (a \vee \bar{d}).$$