L3 Maths

Université de Bourgogne, Mathématiques   Année universitaire 2018–2019

Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

Examen de seconde session
— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf indication contraire, toute réponse devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (Étude de la tractrice). Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ une constante. La *tractrice* est la courbe paramétrée $\alpha :]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$$

avec

$$\alpha_1(t) := a\sin(t) \quad \text{et} \quad \alpha_2(t) := a\cos(t) + a\ln\big(\tan(t/2)\big).$$

(1) Montrer que α admet un unique point singulier, dont on déterminera la position et la nature.

(2) Donner les tableaux de variations des fonctions α_1 et α_2.

(3) Donner la position de la courbe α par rapport à sa tangente en chaque point régulier $\alpha(t)$.

(4) Montrer que le support de α possède un axe de symétrie dont on précisera une équation cartésienne.

(5) La courbe α possède-t-elle des branches infinies ? Le cas échéant, déterminer l'équation cartésienne et la nature de ces branches infinies.

(6) Dessiner l'allure de la courbe α pour $a := 1$.

(7) Calculer la courbure $\kappa(t)$ de la courbe α en tout point régulier $\alpha(t)$.

(8) Calculer, partout où elle est définie, la développée δ de la courbe α.

(9) On note $\beta(t) = (0, \beta_2(t))$ le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite tangente à la courbe α en tout point régulier $\alpha(t)$. Calculer la distance entre $\beta(t)$ et $\alpha(t)$, puis en déduire une façon « mécanique » de tracer la courbe α.

Exercice 2 (Questions de cours). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler la *définition* du repère de Frenet $\big(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t), \mathrm{B}(t)\big)$ de α au point $\alpha(t)$.

(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler les *définitions* de la courbure $\kappa(t)$ et de la torsion $\tau(t)$ de la courbe α au point $\alpha(t)$.

(3) Rappeler (sans les redémontrer) les formules pour calculer κ et τ en fonction des dérivées successives $\alpha', \alpha'', \alpha'''$.

1|2

(4) Soit $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire orthogonale. Montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^3$, on a $\ell(u) \wedge \ell(v) = \det(\ell) \cdot \ell(u \wedge v)$.

(5) Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation affine orthogonale et soit $\tilde{\alpha} := \Phi \circ \alpha$. Justifier que la courbe paramétrée $\tilde{\alpha}$ est birégulière.

(6) En utilisant les questions (3) et (4), exprimer la courbure $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\alpha}$ en fonction de κ.

(7) En utilisant les questions (3) et (4), exprimer la torsion $\tilde{\tau}$ de $\tilde{\alpha}$ en fonction de τ.

Exercice 3 (Étude d'une quadrique)**.** Soient $a, c \in \mathbb{R}_+^*$ des constantes. On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u,v) := \big(\, a \sinh(u)\cos(v)\, ,\, a\sinh(u)\sin(v)\, ,\, c\cosh(u)\,\big)$$

et dont on note $S := \varphi(\mathbb{R}^2)$ le support.

(1) Montrer que S est une quadrique, dont on précisera le nom et une équation cartésienne.

(2) Montrer que S est une surface régulière (i.e. une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2).

(3) Justifier que φ est une surface de révolution en donnant son axe de révolution D, sa courbe génératrice c et en précisant le plan affine P de $\mathbb{R}^3$ dans lequel D et le support de c sont contenus. (Ne pas oublier de vérifier que c est régulière.)

(4) La nappe paramétrée φ est-elle régulière ?

(5) Dessiner l'allure de la surface S pour $a := 1$ et $c := 2$.

On fixe maintenant un couple $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, et *on suppose que* $p := \varphi(r,s)$ *est un point régulier* de φ. On pose

$$f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s), \qquad g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s).$$

(5) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(6) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(7) Calculer la courbure de Gauss K_p de S en p.

On considère dorénavant le point $q := (0,0,c) \in \mathbb{R}^3$.

(8) Vérifier que $q \in S$ et calculer la courbure de Gauss K_q.

(9) Donner une équation cartésienne du plan tangent affine T_qS, et étudier la position relative de S avec celui-ci dans un voisinage de q.