UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE – LICENCE 3 PFA

EXAMEN DE COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES – MAI 2019

Durée : 2h. Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.

Exercice I

Exprimer la distribution porte $\Pi(x)$ en fonction des distributions de Heaviside $H(x+1/2)$ et $H(x-1/2)$. En déduire la dérivée de la distribution porte : $\Pi'(x)$.

Exercice II

a) Quelles sont les transformées de Fourier de :

(i) 1, (ii) $\delta(x)$, (iii) $\delta(x-a)$, (iv) $\exp(2i\pi\nu_0 x)$ et (v) $\cos(2\pi\nu_0 x)$.

b) En utilisant la transformation de Fourier, résoudre les équations (avec $T(x)$ une distribution)

(i) $xT(x) = 0$,

(ii) $x^2T(x) = 0$.

Exercice III

a) Résoudre l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{x\, e^{ix}}{x^2+a^2}. \tag{1}$$

On déterminera les singularités et les résidus. On justifiera chaque étape du calcul.

b) En déduire le résultat de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{x\, \sin x}{x^2+a^2}. \tag{2}$$

Exercice IV

Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{3}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale de cette équation et de la condition initiale. On notera $\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

b) Résoudre l'équation différentielle résultante.

c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Interpréter cette solution.

Rappels. Définition de la distribution de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Définition de la distribution porte :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } |x| < 1/2 \\ 0 \text{ pour } |x| > 1/2 \end{cases} \tag{5}$$

Formules utiles :

$$f(x-a) = \delta(x-a) * f(x) \tag{6}$$

$$\text{(Définition de la transformée de Fourier) } \hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \tag{7}$$

$$\mathcal{F}_\nu[f(x-a)] = e^{-2i\pi\nu a}\mathcal{F}_\nu[f(x)] \tag{8}$$

$$\mathcal{F}_\nu[e^{2i\pi\nu_0 x}f(x)] = \mathcal{F}_{\nu-\nu_0}[f(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{d\nu}\left(\mathcal{F}_\nu[f(x)]\right) = -2i\pi\mathcal{F}_\nu[xf(x)] \tag{10}$$

$$\mathcal{F}_\nu[f'(x)] = 2i\pi\nu\mathcal{F}_\nu[f(x)] \tag{11}$$