L3

Université de Bourgogne
Département de Mathématiques

Licence de Mathématique et de Mécanique
Cours Calcul Scientifique

Examen du 22 mai 2019

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (6) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients c_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $k \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$. En conclure que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
2. *Équation de Poisson* (8) :
   (a) Résoudre analytiquement pour $x \in [-1, 1]$ l'équation
   $$u''(x) + \pi^2 u(x) = \pi^2 x^2, \quad u(-1) = 1 - 2/\pi^2, \quad u'(1) = 0. \qquad (1)$$
   (b) Écrire un code en Matlab pour calculer la solution de (1) numériquement. Utiliser le code cheb.m pour les matrices de différenciation. Prendre $N = 32$ polynômes, donner le graphe de la solution, calculer la norme de la différence avec la solution exacte.
3. *Stabilité et méthode de Heun* (3) :
   La méthode de Heun pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $t_{n+1} - t_n = h$ et $y_n := y(t_n)$ est donnée par
   $$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_{n+1}, y_n + hK_1), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2). \end{aligned}$$

Donner les conditions de stabilité pour cette méthode. En conclure (en comparant avec la solution exacte pour le problème $y' = \lambda y$) que la méthode est de deuxième ordre.

4. *Équation de la chaleur* (3) :
   L'équation de la chaleur prend la forme

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

   Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout $\mathbb{R}$. En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x,0) = f(x)$ où $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.