Université de Bourgogne

Département de Mathématiques

Licence ~~de Mathématique et~~ de Mécanique

Cours Calcul Scientifique - EDP

Examen du 25 juin 2019

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (8) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients c_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $k \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$. En conclure que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. *Équation de Schrödinger* (8) :
   L'équation de Schrödinger dans le vide prend la forme

$$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

   (a) Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout $\mathbb{R}$. En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x, 0) = f(x)$ où $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Écrire un code en Matlab pour résoudre l'équation de Schrödinger dans le vide pour la condition initiales $\psi_0(x) = \exp(-10x^2)$ avec $x \in [-\pi, \pi]$ avec *fft*. Prendre $N = 32$ modes de Fourier et $N_t = 100$ pas dans le temps pour $t \in [0, 1]$. Visualiser la valeur absolue de la solution.

3. *Stabilité* : (4)
Pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, la méthode d'Euler explicite prend la forme

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)),$$

où on applique la discrétisation $t = t_0, t_1, t_2, \ldots$ et où $t_{n+1} - t_n = h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. La méthode d'Euler implicite est donnée par

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})).$$

Donner les domaines de stabilité. Une des méthodes est-elle A-stable ?
Indication : Étudier l'équation $y'(t) = \lambda y(t)$, où la constante $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\Re\lambda < 0$. Discuter le domaine de stabilité dans le plan complexe de $z = h\lambda$.