Université de Bourgogne
Département de mathématique
UFR Sciences et Techniques

L3 mathématiques
UE-Intégration.

Calcul Intégral

Examen du 7 janvier 2019
durée : trois heures

Notations. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Vous rédigerez les exercices 1 et 2 sur une feuille, les exercices 3 et 4 sur une autre.

Exercice 1. Soit μ une mesure σ-finie sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On munit $X \times \mathbb{R}_+$ de la tribu produit $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ et de la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ et on considère $H = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+ : f(x) > t\}$.

1. Justifier que $H \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, démontrer que
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu\Big(\big\{x \in X : f(x) > t\big\}\Big) \, \mathrm{d}\lambda(t) \qquad \text{(indication : on calculera } (\mu \otimes \lambda)(H) \text{ de deux façons).}$$

***

Exercice 2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}\lambda(t)$

1. Vérifier que f est bien définie et continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner la limite de f en $+\infty$.
3. Donner la dérivée de f sous forme d'une intégrale puis calculer cette intégrale.
4. En déduire une expression simple de f (on pensera à utiliser la question 2), et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Rappel. Vous rédigerez les exercices 1 et 2 sur une feuille, les exercices 3 et 4 sur une autre.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à λ.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{nx} f(x)$ est intégrable sur $[0,1]$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[0,1]$ et qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_{[0;1]} \mathrm{e}^{nx} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \leq M.$$

2. On veut montrer que f est nulle presque partout. Pour cela, on note $D = \{x \in [0;1] : f(x) \neq 0\}$ et on fixe $K > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;1]$, on pose $h_{K,n}(x) = \overset{\min}{\cancel{\max}}\{\mathrm{e}^{nx} f(x); K\}$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(h_{K,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Déterminer la fonction limite.
   (b) En déduire que $\lambda(D) \leq \frac{M}{K}$, puis conclure.
3. Que peut-on conclure si de plus f est continue sur $[0;1]$? Justifier.

***

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions :
$$g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad h_1(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad g_n(x) = n g_1(nx), \qquad h_n(x) = h_1\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

On définit aussi la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} h_n(u) h_1(v) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-v)u} \, \mathrm{d}\lambda_2(u,v)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n \, \mathrm{d}\lambda = \pi$ et préciser la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_1(u) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux} \, \mathrm{d}\lambda(u)$. En déduire que $g_n(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(u) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux} \, \mathrm{d}\lambda(u)$.
4. En utilisant le théorème de Fubini et la question 2, montrer les deux égalités suivantes :
   (a) $F_n(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(u) g_1(u) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux} \, \mathrm{d}\lambda(u)$;
   (b) $F_n(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x-v) h_1(v) \, \mathrm{d}\lambda(v) = \int_{\mathbb{R}} g_1(t) h_1\Big(x - \frac{t}{n}\Big) \, \mathrm{d}\lambda(t)$.
5. En déduire, en utilisant deux fois un théorème du cours, que $h_1(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}}{1+u^2} \, \mathrm{d}\lambda(u)$.