Examen - UE LM5C - Calcul intégral - Durée : trois heures

Exercice 1. Soit E un ensemble quelconque.

1. Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{E}$ sur E. Donner deux exemples de tribus sur E.
2. Montrer que si $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus sur E alors $\bigcap_{i\in I}\mathcal{E}_i$ est une tribu sur E.
3. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E. Donner la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ sur E engendrée par $\mathcal{C}$ et justifier son existence.
4. Soit X un autre ensemble et $f : X \to E$ une application.
   (a) Montrer que si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E alors $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}$ est une tribu sur X.
   (b) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X, alors $\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{P}(E) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur E.

***

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue λ et $\mathbb{R}^2$ de la mesure de Lebesgue $\lambda_2 = \lambda\otimes\lambda$.

1. Montrer que la fonction définie presque partout par $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u^2-1}$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que
$$\int_{]1+\infty[} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}\lambda(u) = \int_{]0;1[} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}\lambda(u).$$
3. En utilisant un théorème du cours dont on rappellera l'énoncé précis, montrer que
$$\int_{]0;1[} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}\lambda(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
4. Soient Q le quart de plan défini par $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$ et f la fonction définie sur Q par
$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}.$$
   En calculant $J = \displaystyle\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ de deux façons, montrer que
   (a) $J = \dfrac{\pi^2}{2}$;
   (b) $J = 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln(u)}{u^2-1}\,\mathrm{d}\lambda(u)$.
   (c) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

***

Exercice 3. On munit $[0;1]$ de la mesure de Lebesgue λ. Soit f une fonction définie presque partout sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est intégrable sur $[0;1]$ (on rappelle que puisque f est intégrable sur $[0;1]$, f est finie presque partout). On suppose aussi que f possède une limite L en 1 qui est finie et non nulle. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_{[0;1]} x^n f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Rappeler l'énoncé précis du théorème de convergence dominée.

3. Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
4. On suppose dans cette question uniquement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que
$$I_n \sim \frac{L}{n} \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie presque partout sur $[0;1]$ par $g_n(x) = nx^n f(x)$.
   (a) Montrer que pour presque tout $x \in [0;1]$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$.
   (b) On suppose qu'il existe une fonction intégrable positive g définie presque partout sur $[0;1]$ telle que pour presque tout $x \in [0;1]$, $|g_n(x)| \leq g(x)$. Que peut-on alors dire de $\lim_{n\to\infty} nI_n$? Justifier.
   (c) En vous basant sur le résultat de la question 4, montrer que l'hypothèse de la question 5(b) n'est pas valable en général.
6. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in [\alpha;1[$, $|f(x)| \leq 2|L|$.
7. En déduire, au moyen du changement de variable $u = x^n$ puis du théorème de convergence dominée que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[\alpha;1]} nx^n f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = L.$$
8. En utilisant le théorème de convergence dominée, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0;\alpha]} nx^n f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$.
9. En déduire que le résultat de la question 4 est encore vrai même si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

⋆⋆⋆

EXERCICE 4. Calculer $I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.