Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2019

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN (3 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(4 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + ye^x - y^2x + x^2 = 0\}$.

1. *(2 pts)* Montrer que $\mathcal{C}$ est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $\varphi\colon x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$.
2. *(2 pts)* Calculer la dérivée $\varphi'(0)$.

II (*6 pts*)

On considère l'application $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (u,v) = (e^x - e^y, x+y)$.

1. (*3 pts*) Montrer que h est un difféomorphisme.
2. (*1 pt*) Montrer que les fonctions $F\colon (u,v) \mapsto A(u)\,e^v$ où $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifient $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = v$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. (*2 pts*) En déduire des solutions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ de l'équation $e^y \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + e^x \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x+y)(e^x + e^y)$. On pourra pour cela poser $f = F \circ h$ pour les solutions f, et déterminer l'équation vérifiée par F.

III (*6 pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1 = 0\}$.

1. (*2 pts*) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ en chacun de ses points.
2. (*2 pts*) Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à la variété $\mathcal{S}$ au point a.
3. (*2 pts*) On considère le point $P = (1,0,0)$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{S} \colon P \in T_a\mathcal{S}\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine d'équation $2x - 2y = 1$.

IV (*4 pts*)

Montrer que le système d'équations

$$x = \frac{1}{4}\sin(x+y) + t - 1$$
$$y = \frac{1}{4}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

admet une unique solution $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2$, et que l'application $h\colon t \mapsto (x_t, y_t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.