Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Juin 2019

CALCUL DIFFERENTIEL - DEUXIÈME SESSION (3 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I (*4 pts*)

Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^5 + y, x - y^3)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

II (*4 pts*)

On rappelle qu'on peut identifier $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe deux voisinages V et W de la matrice identité Id_2 tels que pour toute matrice $A \in V$, il existe une unique matrice $B \in W$ telle que $B^2 = A$.

III (*8 pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1 = 0\}$.

1. **(*1 pt*)** Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de de $\mathbb{R}^3$ en chacun de ses points.
2. **(*1 pt*)** Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à la variété $\mathcal{S}$ au point a.
3. On considère le point $P = (1, 0, 0)$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{S}\colon P \in T_a\mathcal{S}\}$.
   (a) **(*1 pt*)** Montrer $\mathcal{E}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine d'équation $2x - 2y = 1$.
   (b) **(*1 pt*)** Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide (on pourra considérer des valeurs simples de x).
   (c) **(*2 pts*)** Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
4. **(*2 pts*)** Parmi les points de $\mathcal{E}$, lequel est le plus éloigné de P ?

IV (*4 pts*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficents réels de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que cet espace est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$ grâce à l'isomorphisme qui à tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ associe $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^n$.

1. **(*2 pts*)** Calculer la différentielle de l'application $G : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_1[X]$ associe $P(X)^2$.
2. **(*2 pts*)** En déduire la différentielle de l'application $F\colon \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ qui à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_1[X]$ associe $\int_0^1 P(X)^2\,\mathrm{d}X$.