

L3 ESI

**Examen de rattrapage d'Automatique/Robotique**

Durée : 2H.

Une « page A4 » est autorisée.

**Exercice 1**

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \end{cases} \quad (1)$$

- 1) Trouver le point de fonctionnement  $(x_1^*, x_2^*, u^*)$  du système. Vérifier que le triplet  $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, 3, -3)$  correspond à un point de fonctionnement.
- 2) Démontrer que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement  $(0, -1, 1)$  donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \quad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad (3)$$

Où  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$  est le nouveau vecteur de variables d'état et  $U$  est la nouvelle commande.

- 3) Analyser la stabilité du système (3) en calculant ses valeurs propres.
- 4) Trouver le gain  $K = [k_1 \quad k_2]$  de la commande  $u = -KX$  qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont  $(-3, -2)$ .

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas :

a)  $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b)  $Y = \frac{X_2}{2}$

- 5) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas.
- 6) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont  $(-4, -3)$ . Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

## Exercice 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{X}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (4)$$

- 1) Est ce que la variable  $X_2(t)$  est commandable ? Justifier.
- 2) Donner l'expression de la solution de la variable  $X_2(t)$  dans le cas d'une entrée quelconque,

$$\text{un } t_0 = 0 \text{ et un état initial } X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- 3) Est ce que la variable  $X_2(t)$  est stable ? justifier.

- 4) Donner la solution  $X_1(t)$  dans le cas :  $U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  (5)

- 5) Donner la solution  $X_2(t)$  dans le cas discret pour une période d'échantillonnage  $T_e$ .