L3 Maths

2018/19

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (11 janvier 2019)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR) **[3 points]**

   i) Énoncer le théorème de décomposition QR d'une matrice. **[1.5 points]**

   iii) Étant donnée la matrice A (avec $a < 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

   écrire sa décomposition QR. **[1.5 points]**

2. (Valeurs propres) **[7 points]**

   i) Énoncer le théorème des cercles de Gershgorine. **[1 point]**

   ii) Si on considère la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix},$$

   vérifier le théorème de cercles de Gershgorine et l'illustrer en esquissant une figure. **[2 points]**

   iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, avec $U^{-1}AU$ diagonale. Notons $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, où $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Montrer que pour chaque valeur propre $\lambda(\varepsilon)$ de $A(\epsilon)$, il existe $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$ vérifiant :

$$|\lambda(\epsilon) - \lambda_i| \leq \varepsilon \operatorname{cond}_\infty(U)\, ||C||_\infty .$$

   [2 points]

   iv) Si on considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   appliquer iii) pour trouver une borne supérieure pour ε garantissant que $A(\epsilon) = A + \epsilon C$ soit définie positive (où A est donnée dans le point ii)). **[2 points]**

3. (Méthodes itératives) **[7 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ ($a > 0$) arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} .$$

i) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[2 points]**, Jacobi **[1 point]** et Gauss-Seidel **[1 point]**.

ii) Soit $||\cdot||$ la norme matricielle induite associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. Si l'erreur au pas k est défini par $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, montrer que si $||B|| < 1$ et k satisfait

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1-||B||}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right) - N\ln(10)}{\ln(||B||)},$$

alors $||e^{(k)}|| < 10^{-N}$. **[1 point]**

iii) Si on considère la norme $||\cdot||_2$, expliciter cette condition sur k (en termes de $x^{(1)}$, $x^{(0)}$ et N), pour :

a) Les matrices B_R et B_J correspondantes aux méthodes de Richardson et Jacobi, respectivement, pour les cas convergents déterminés dans i). **[1 point]**

b) La matrice B_{G-S} correspondante à la méthode de Gauss-Seidel, pour les valeurs de a appropriées. **[1 point]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[3 points]**

i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[1.5 points]**

ii) Écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1.5 points]** :

$$\begin{cases} e^x + 3xy + x = 0 \\ \sin(x) + 2x^2y = 0 \end{cases}$$