L3 maths

L3 Analyse Numérique (2018/19)
Session 2 (24 juin 2019)

Temps : 3h00

1. (Décomposition LU) **[4 points]**

   Étant données les matrices (symétriques définies positives) :

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   i) Donner la décomposition LU de chaque matrice Δ_2, Δ_3 et Δ_4. **[2 points]**

   ii) Proposer la forme des matrices L_n et U_n de la décomposition LU de la matrice Δ_n :

$$(\Delta_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & , i = j \\ -1 & , |i-j| = 1 \\ 0 & , |i-j| > 1 \end{cases}$$

   [1 point]

   iii) Démontrer, pour tout n entier naturel, que l'on a bien la décomposition $\Delta_n = L_n U_n$ proposée. Est-elle unique ? Justifier votre réponse. **[1 point]**

2. (Normes matricielles induites et rayon spectral) **[7 points]**

   Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$ (comme espaces linéaires sur $\mathbb{C}$) :

   i) Définir la norme matricielle induite $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ (sur le corps $\mathbb{C}$). **[1 point]**

   ii) Définir le rayon spectral $\rho(A)$ de A. **[1 point]**

   iii) Pour la norme du point i), montrer (noter que cette norme est prise sur $\mathbb{C}$)

$$\rho(A) \leq ||A|| \, .$$

   [2 points]

   iv) Donner un example de norme $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\rho(A) > ||A||$. Est-elle cette norme une norme matricielle ? Justifier. **[1 point]**

   v) Si A est symétrique, prouver (à partir de la définition de la norme $||\cdot||_2$)

$$\rho(A) = ||A||_2 \, ,$$

   où $||\cdot||_2$ est la norme matricielle induite en $M_n(\mathbb{R})$ à partir de la norme euclidienne en $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire $||x||_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}^n$). **[2 points]**

3. (Valeurs propres) **[3 points]**

   i) Énoncer et démontrer le théorème des cercles de Gershgorine. **[2 points]**

   ii) Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

   vérifier le théorème de cercles de Gershgorine et l'illustrer en esquissant une figure. **[1 point]**

4. (Méthodes itératives) **[3 points]**
Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.
   i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectral $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$. **[1 point]**
   ii) Soit $||\cdot||$ la norme matricielle induite associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. Si l'erreur au pas k est défini par $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, montrer que si $||B|| < 1$ et k satisfait

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1-||B||}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right) - N\ln(10)}{\ln(||B||)},$$

   alors $||e^{(k)}|| < 10^{-N}$. **[2 points]**

5. (Systèmes non-linéaires) **[3 points]**
   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[1.5 points]**
   ii) Écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système :

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ -y^3 + 3yx^2 = 0 \end{cases},$$

   en écrivant la condition nécessaire sur $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ pour définir l'itération à chaque pas. **[1.5 points]**