L3 maths

Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année universitaire 2018–2019
Département de Mathématiques

L3 — Analyse fonctionnelle
Épreuve finale du 27 mai 2019 — Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Justifier vos affirmations.
Une attention particulière sera portée à la rédaction par le correcteur.

Exercice 1. (Fonctions d'Hermite) Soit $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue λ. $\mathscr{H}$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, d\lambda(x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $H_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

(1.1) Déterminer H_0, H_1 et H_2.

(1.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$

(1.3) En déduire que H_n est un polynôme de degré n.

(1.4) Calculer le terme de plus haut degré de H_n.

(1.5) On pose $h_n(x) := e^{-x^2/2} H_n(x)$. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathscr{H}$ et calculer les produits scalaires $\langle h_m, h_n\rangle$ pour $m > n$. (Faire m intégrations par parties).

(1.6) Montrer que $\langle h_n, h_n\rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$ et en déduire que les $e_n := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} h_n$ constituent un système orthonormé de $\mathscr{H}$.

(1.7) Soit M le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ engendré par la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2} P(x)$ appartient à M.

(1.8) Soient $f \in \mathscr{H}$ et P une fonction polynomiale. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2} P(x) f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

(1.9) Soit $f \in \mathscr{H}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P(x) f(x) d\lambda(x) = 0$ pour toute fonction polynomiale P. Montrer que la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2} f(x)$ est nulle. (Développer e^{-itx} en série entière dans la transformée de Fourier).

(1.10) En déduire que $M^{\perp} = \{0\}$ et que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$.

Exercice 2. Soit $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ où $x \in \mathbb{R}$. m désigne la mesure de Lebesgue normalisée : $m = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$.

(2.1) Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R}, m; \mathbb{C})$ et calculer $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f.

(2.2) Est-ce que $\hat{f}$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}, m; \mathbb{C})$?

(2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cos(t/2)\, dt$. (Utiliser la formule d'inversion).

(2.4) Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right)^2 dt$.