Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année universitaire 2018–2019
Département de Mathématiques

L3 — Analyse fonctionnelle
Épreuve du 24 juin 2019 — Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Justifier vos affirmations.
Une attention particulière sera portée à la rédaction par le correcteur.

Exercice 1. Soit $p \in [1,\infty[$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ. On note par q l'exposant conjugué de p. Pour $f \in L^p := L^p(\mathbb{R},\lambda;\mathbb{K})$ on pose :

$$N(f) := \sup_{g\in L^q, \|g\|_q=1} \|fg\|_1.$$

(1.1) Vérifier que $N(f) \leq \|f\|_p$.

(1.2) Montrer que $N(f) = \|f\|_p$.

Exercice 2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions $e_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $e_t(x) = \exp(itx)$. Soit V le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par la famille $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

(2.1) Montrer que la formule :

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

définit bien une application de $V \times V$ dans $\mathbb{C}$.

(2.2) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

(2.3) Vérifier que $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un système orthonormé de $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

(2.4) On note H le complété hilbertien de V. Montrer que $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une base hilbertienne de H.

(2.5) L'espace de Hilbert H est-il séparable ?

Exercice 3. Soit $\mathscr{H} = L^2([-\pi,\pi],\lambda;\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert complexe des fonctions de carré intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$. On considérera les éléments de $\mathscr{H}$ comme des fonctions 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur tout segment $[b-\pi, b+\pi]$. On munit $\mathscr{H}$ de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$. Les coefficients de Fourier de $f \in L^2([-\pi,\pi],\lambda;\mathbb{C})$ sont notés $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(3.1) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite *bornée* de nombres complexes. Soit $f \in \mathscr{H}$, montrer que la correspondance

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n \mapsto S(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n \hat{f}(n)e_n \tag{$\diamond$}$$

définit un opérateur linéaire borné $S\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

(3.2) Calculer la norme de S.

(3.3) Pour $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ désigne l'opérateur de translation défini par $\tau_a(f)(t) = f(t+a)$. Vérifier que S commute avec les translations, c'est-à-dire $S\tau_a = \tau_a S$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(3.4) Inversement, montrer qu'un opérateur borné $U\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ qui commute avec les translations est de la forme ($\diamond$) pour une suite bornée de nombres complexes $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. *Indication* : Calculer $U(\tau_a(e_k))$ et $\tau_a(U(e_k))$.