Université de Bourgogne, Mathématiques L3 Année universitaire 2018–2019

Algèbre linéaire et bilinéaire (LMo5E)

Examen final

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.
La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.
Cet énoncé contient cinq exercices, où chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(2) Après avoir justifié que A admet une décomposition de Jordan dans $\mathbb{R}$, déterminer sa forme réduite de Jordan qu'on notera J.

(3) Trouver $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PJP^{-1}$. *(On ne demande pas le calcul de P^{-1}.)*

(4) Quel est le polynôme minimal de A ?

(5) Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de *plus petit degré possible* tel que $A^{-1} = Q(A)$.

Exercice 2. Soit $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$b(x,y) := x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3$$

pour tous éléments $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

(1) Donner la matrice de b dans la base canonique e de $\mathbb{R}^4$, et préciser quelle est la forme quadratique q associée à b.

(2) Déterminer le noyau de b et en déduire le rang de b.

(3) Décomposer q en carrés de formes linéairement indépendantes, et en déduire la signature de q.

(4) Donner une base orthogonale de b et préciser quelle est la matrice de b dans cette base.

(5) Calculer le cône isotrope de q, et comparer celui-ci au noyau de b.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{C}_n[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace des polynômes de degré au plus n à cœfficients complexes (resp. réels). Soit $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}$ la forme hermitienne définie par

$$\varphi(A,B) := \int_{-1}^{1} \overline{A(x)}\, B(-x)\, \mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{I}_n$) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$ constitué des polynômes pairs (resp. impairs).

(1) Montrer que la restriction de φ à $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n$ est définie positive. Quid de la restriction de φ à $\mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n$?

(2) Calculer la restriction de φ à $(\mathcal{P}_n \times \mathcal{I}_n) \cup (\mathcal{I}_n \times \mathcal{P}_n)$.

(3) Soit $\varphi^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la restriction de φ aux polynômes réels. Déduire des questions précédentes la signature de $\varphi^{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. Soient E, E' des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $u : E \to E'$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On se donne des sous-espaces vectoriels $F \subset E$, $F' \subset E'$ tels que $u(F) \subset F'$, et on rappelle que u induit une application linéaire $\tilde{u} : E/F \to E'/F'$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \tilde{u}([x]_F) := [u(x)]_{F'}.$$

(1) Décrire le noyau de $\tilde{u}$ comme espace quotient. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur u, F et F' pour que $\tilde{u}$ soit injective.

(2) Décrire l'image de $\tilde{u}$ comme espace quotient. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur u et F' pour que $\tilde{u}$ soit surjective.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne et soit $\varphi_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\varphi_A(x, y) := {}^t\overline{x}\, A\, y$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$ écrits sous forme de vecteurs colonnes.

(1) Montrer que φ_A est une forme hermitienne.

(2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur le spectre de A, l'application φ_A est-elle un produit scalaire hermitien ?

(3) On suppose que A vérifie la condition établie en (2). Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T à cœfficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^t\overline{T}\, T$.

(4) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. Déduire de la question (3) qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T à cœfficients diagonaux strictement positifs telles que $P = UT$.