Licence de Mathématiques (2018-2019)

Intitulé de l'enseignement: Algèbre linéaire et bilinéaire (L3).
Date: mardi 25 juin 2019

Examen (session de de rattrapage)

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 : Matrices nilpotentes

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont dites *conjuguées* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On appelle *classe de conjugaison* d'une matrice A l'ensemble des matrices qui sont conjuguées à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

▷ **1)** On suppose que $n = 3$. Déterminer le nombre de classes de conjugaison des matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (*Indication : On pourra considérer les différentes formes réduites de Jordan possibles d'une matrice nilpotente.*)

▷ **2)** Même question pour $n = 4$. (*Et même indication.*)

▷ **3)** Donner un exemple de deux matrices A et B qui ne sont pas conjuguées mais qui ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.

Exercice 2 : Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

▷ **1)** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_A la forme linéaire définie comme suit :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad f_A(X) = \mathrm{tr}(AX).$$

Montrer que l'application $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*, \quad A \mapsto f_A$

établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$.
(*Indication : On pourra montrer que si* $\mathrm{tr}(AE_{ij}) = 0$ *pour toute matrice élémentaire* E_{ij}*, alors nécessairement* A *est la matrice nulle.*)

▷ **2)** Soit $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire vérifiant l'égalité suivante :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \varphi(XY) = \varphi(YX).$$

Montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $\varphi(X) = \lambda Tr(X)$.
(*Indication : On pourra évaluer* φ *sur des produit de matrices élémentaires* $E_{ij}E_{jl}$*.*)

▷ **3)** Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ rencontre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
(*Indication : On pourra utiliser la question 1 pour montrer qu'un hyperplan de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *est le noyau de la forme linéaire* f_A *pour une certaine matrice* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$*.*)

▷ **4)** Est-ce que l'énoncé précédent reste vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$? Merci de justifier votre réponse et de fournir un contre-exemple si vous pensez que la réponse est négative.

Exercice 3 : Condition suffisante pour que deux matrices unitaires commutent
Soit $n \geq 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $||A|| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ avec $A^* = {}^t\overline{A}$. On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices unitaires de taille n.

▷ **1)** Justifier, après avoir rappelé la définition, que $|| \cdot ||$ est une norme associée à un produit scalaire hermitien.

▷ **2)** Montrer que

$$\forall A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\quad ||AM|| = ||MA|| = ||M||.$$

▷ **3)** Soient A, B deux matrices de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et on pose $C = ABA^{-1}B^{-1}$. On suppose que $AC = CA$. Montrer que A et BAB^{-1} commutent.

▷ **4)** Soient A et B comme dans la question précédente. Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de module 1 et une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $U^*AU = D$ et $U^*BAB^{-1}U = D'$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$.
(*Indication : On rappelle que deux matrices unitaires qui commutent sont diagonalisables simultanément.*)

▷ **5)** On suppose de plus que $||I_n - B|| < \sqrt{2}$. Conclure que $AB = BA$.
(*Indication : Il s'agit d'utiliser l'hypothèse $||I_n - B|| < \sqrt{2}$ pour montrer que $\lambda_i = \lambda_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On pourra procéder par la contraposée.*)

Exercice 4 : Famille de formes quadratiques
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$q_a(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz).$$

▷ **1)** Donner la matrice de q_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

▷ **2)** Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q_a est-elle non-dégénérée ?

▷ **3)** Quelle est la signature de la forme quadratique q_a (en fonction de a) ?
(*Indication: Pour déterminer les valeurs propres de la matrice de q_A on pourra se ramener à l'étude des valeurs propres de la matrice auxiliaire* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$).

▷ **4)** Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour toutes les formes quadratiques q_a puis donner la matrice de q_a dans cette nouvelle base.

▷ **5)** Déterminer une équation cartésienne du cône isotrope de q_2 et préciser sa nature géométrique (point, courbe, surface ou solide).