Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Vendredi 24 mai 2019
9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 1 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soit G un groupe.
   (a) Donner la définition du sous-groupe dérivée $D(G)$ du groupe G.
   (b) Soient a, b, g trois éléments de G. Démontrer que le conjugué $g[a,b]g^{-1}$ du commutateur $[a,b]$ est un commutateur.
   (c) Montrer que le sous-groupe $D(G)$ est un sous-groupe normal de G.
   (d) Montrer que le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien.
   (e) Montrer que si H est un sous-groupe normal de G tel que G/H est abélien, alors $D(G) \subset H$.
2. Soit G un groupe fini d'ordre n et p un diviseur premier de n. Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy.

Exercice 2 : Soit p un nombre premier et G l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/pZ$ de la forme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k & \ell \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } k, \ell, m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif.
2. Montrer que le groupe G est d'ordre p^3.
3. Déterminer le centre de $Z(G)$ du groupe G. Préciser son ordre.

Exercice 3 : Soit G un groupe fini d'ordre n et H un sous-groupe de G d'indice fini m. On fait agir G par translation sur l'ensemble des classes à gauche G/H :

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ & (g, xH) & \longmapsto & g * xH = (gx)H \end{array}$$

Soit $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{B}\text{ij}(G/H)$ le morphisme de groupes associé à cette action : $\forall g \in G, \forall xH \in G/H,\ \varphi(g)(xH) = (gx)H$.

1. Montrer que le noyau N du morphisme φ est un sous-groupe normal de G inclus dans H.
2. Montrer que $N = \bigcap\limits_{x \in G} xHx^{-1}$.
3. Montrer que N est le plus grand sous-groupe de H normal dans G.
4. Montrer que si φ est injective, alors n divise $m!$.
5. (**** cette question est hors barème**) Soit p le plus petit diviseur premier de n et H un sous groupe de G d'indice p. Montrer que H est normal dans G.

Exercice 4 : On désigne par $\mathbb{A}$ l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{a + ib\sqrt{7} \,|a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Déterminer l'ensemble des unités $\mathcal{U}(\mathbb{A})$ de l'anneau $\mathbb{A}$.
2. Rappeler la définition d'un élément irréductible d'un anneau et montrer que les éléments 2, $1 + i\sqrt{7}$ et $1 - i\sqrt{7}$ sont irréductibles dans $\mathbb{A}$.
3. Montrer que dans un anneau principal, si trois éléments a, b, c vérifient : a est irréductible, $a|bc$ alors $a|b$ ou $a|c$.
4. En utilisant ce qui précède et en calculant $(1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7})$ montrer que l'anneau $\mathbb{A}$ n'est pas principal.

Exercice 5 : 1. (Questions préliminaires)

(a) Soient m et n deux entiers naturels non nuls, $G_1 = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n engendré par a et G_2 un groupe fini d'ordre m. Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Montrer que $\varphi(a)$ est d'ordre un diviseur de $d = \text{pgcd}(m, n)$. Que peut-on conclure si m et n sont premiers entre eux ?

(b) On suppose que m et n sont deux nombres **premiers** distincts. On note $\mathcal{A}ut(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ le groupe des automorphismes du groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   i. Montrer que les groupes $(\mathcal{A}ut(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \circ)$ et $\left((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*, \times\right)$ sont isomorphes.

   ii. À quelle condition existe-t-il un morphisme non trivial de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathcal{A}ut(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \circ)$?

2. Soient p et q deux nombres premiers impairs tels que $p > 2q$ et q ne divise pas $(p-1)$ (par exemple $p = 11$ et $q = 3$). Soit G un groupe d'ordre $2pq$.

   (a) Montrer que G possède des sous-groupes d'ordres p, q et 2.

   (b) Soient K_1 et K_2 deux sous-groupes de G d'ordre p. On veut montrer par l'absurde que $K_1 = K_2$. Pour cela on suppose que $K_1 \neq K_2$.

      i. Montrer que $K_1 \cap K_2 = \{1_G\}$.

      ii. Montrer que le sous-ensemble $K_1.K_2$ contient p^2 éléments.

      iii. Conclure.

   (c) En déduire que le groupe G contient un seul sous-groupe K d'ordre p et montrer que ce sous-groupe est normal dans G. Dire pourquoi K est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

La suite est hors barème

   (d) Soit H un sous-groupe d'ordre q de G.

      i. Montrer que le sous-ensemble $R = K.H$ est un sous-groupe de G. Préciser l'indice de R dans G et montrer que $R \lhd G$.

      ii. Montrer que R est un produit semi-direct de K par H.

      iii. Soit $\varphi : H \to \mathcal{A}ut(K)$ tel que $R = K \rtimes_\varphi H$. En utilisant les questions préliminaires, montrer que φ est le morphisme trivial. Que peut-on en déduire à propos de R ?

      iv. Justifier que H est normal dans R et que R est cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. .

      v. Montrer finalement que H est aussi un sous-groupe normal de G et que H est le seul sous groupe de G d'ordre q.

   (e) Soit L un sous-groupe d'ordre 2 de G.

      i. Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct de $R = K.H$ par L.

      ii. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}ut(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})$ le morphisme de groupes défini par $\varphi(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}}$ et $\varphi(1) = -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}}$. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un groupe non commutatif d'ordre $2pq$.